Die Eulersche Summationsformel

Gerrit Bauch, Leon Lang

25.06.2013

1 Vorbemerkungen

Unser Vortrag ist eine Ausarbeitung von 11.10 aus Analysis I, Königsberger. Die darin behandelte Eulersche Summationsformel stellt eine Beziehung zwischen Summation und Integration her und ermöglicht es uns somit, Summen über Integrale auszudrücken.

2 Die einfache Eulersche Summationsformel

Bevor wir die Eulersche Summationsformel aufschreiben und beweisen können, definieren wir uns die periodische Hilfsfunktion H:

Definition 2.1

Sei für $x \in \mathbb{R}$ die Zahl $\lfloor x \rfloor$ definiert durch $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$. Dann definieren wir die Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) := \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & , \; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Satz 2.2 (Einfache Eulersche Summationsformel)

Ist $f : [1, n] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n H(x) f'(x)\mathrm{d}x$$

Beweis

Wir beweisen die Formel stückweise. Für ein beliebiges $k \in \{1, ..., n-1\}$ erhält man durch partielle Integration:

$$\int_k^{k+1} 1 \cdot f(x)\mathrm{d}x = \left[\left(x - k - \frac{1}{2}\right) \cdot f(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) \cdot f'(x)\mathrm{d}x$$

Für $x \in (k, k+1)$ gilt: $\lfloor x \rfloor = k$, denn k ist die größte ganze Zahl $\leq x$. Daher gilt auf diesem Intervall

$$x - k - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = H(x)$$

Setzt man diese Identität ein, so erhält man:

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(f(k+1)+f(k)\right) - \int_k^{k+1} H(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Wir summieren diese Gleichung nun für $k = 1, 2, ..., n-1$ auf und addieren noch $\frac{1}{2}\left(f(1)+f(n)\right) - \frac{1}{2}\left(f(1)+f(n)\right) = 0$ und erhalten:

$$\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2}\left(f(1)+f(n)\right) - \int_1^{n} H(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Umstellen liefert die Behauptung.

Beispiel 2.3

Sei $0 \neq s \neq -1$ und $f(x) := x^s$. Dann erhalten wir mit dem vorangegangenen Satz eine schöne Darstellung für Potenzsummen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \frac{1}{s+1}n^{s+1} - \frac{1}{s+1} + \underbrace{\frac{1}{2}(1+n^s) + \int_1^{n} sH(x)x^{s-1}\mathrm{d}x}_{=:Rest}$$

Wir sind natürlich daran interessiert, den Rest abzuschätzen. Offensichtlich gilt $\|H\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{2}$, sodass für das Integral im Restglied folgt:

$$\left|\int_1^{n} sH(x)x^{s-1}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}\left|s\int_1^{n} x^{s-1}\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}|n^s - 1|$$

Der Rest lässt sich damit leicht abschätzen zu $0 \leq |Rest| \leq 1$ für $s < 0$ bzw. zu $1 \leq |Rest| \leq n^s$ für $s > 0$.

Beispiel 2.4

Die Riemannsche ζ-Funktion ist bekanntermaßen über eine spezielle Reihe definiert. Wir führen im Folgenden aus, wie man diese Reihe mit Hilfe unserer Formel über ein Integral ausdrücken kann:

Sei $s > 0$ und $f(x) := x^{-s}$. Man erhält durch Einsetzen in die Eulersche Summationsformel:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^s}\right) - s\int_1^{n} \frac{H(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$$

Die Summe auf der linken Seite hat für $n \to \infty$ genau dann einen Grenzwert, wenn $s > 1$ gilt (siehe Vortrag 1). Für diese s folgt dann mit dem Grenzübergang

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^{\infty} \frac{H(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$$

Hier ergibt sich etwas Erstaunliches: Der rechte Teil der Gleichung konvergiert bereits für alle $s > 0$. Tatsächlich ist die Formel daher zur Erweiterung der ζ-Funktion auf den Zahlenbereich $(0, 1)$ geeignet, auf dem die ζ-Reihe bekanntermaßen gar nicht mehr konvergiert.

3 Die Trapezformel

Da auf der rechten Seite der Eulerschen Summationsformel ein Integral über einem Produkt von Funktionen steht, liegt es nahe, die Formel durch eine zweite partielle Integration zu verfeinern. Dazu benötigen wir die Voraussetzung $f \in C^2(\mathbb{R})$ sowie eine Stammfunktion von H. Diese sei gegeben durch:

$$\Phi(x) := \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right)$$

für $x \in [0, 1]$ und eine 1-periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$.

Satz 3.1

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^2(\mathbb{R})$, so gibt es ein $\xi \in (0, n)$ mit

$$\int\limits_0^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(0) + f(n)}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} f(\nu) - \frac{n}{12} f''(\xi)$$

Beweis

Durch partielle Integration erhalten wir (Beachte: $\Phi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$):

$$\int\limits_0^n H(x)f'(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\Phi(x)f'(x)\right]_0^n}_{=0} - \int\limits_0^n \Phi(x)f''(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^n \Phi(x)f''(x)\mathrm{d}x$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus Analysis I - Aufgabe 12.1 gibt es nun ein $\xi \in (0, n)$ mit

$$\int\limits_0^n \Phi(x)f''(x)\mathrm{d}x = f''(\xi)\int\limits_0^n \Phi(x)\mathrm{d}x \overset{\Phi \text{ per.}}{=} nf''(\xi)\int\limits_0^1 \frac{x^2 - x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{n}{12}f''(\xi)$$

Durch Einsetzen der Erkenntnisse in die Eulersche Summationsformel folgt die Behauptung.

Dieser Satz erfährt im Folgenden eine weitere Verallgemeinerung.

Definition 3.2

Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^2([a, b])$ eine Abbildung auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann definieren wir die Trapezsumme zur Schrittweite $h := \frac{b-a}{n}$ durch

$$T(h) := h\left(\frac{g(a) + g(b)}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} g(a + \nu h)\right)$$

Satz 3.3

Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie in Definition 3.2. Dann folgt:

$$\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = T(h) - \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot g''(\tau)$$

für ein $\tau \in [a, b]$.

Beweis

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(x) := xh + a$. Wir setzen $f(x) := g(\varphi(x))$. f ist dann zwei mal differenzierbar und es gilt:

$$f''(x) = h^2 \cdot g''(\varphi(x))$$

sowie mit Variablensubstitution:

$$\int\limits_0^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{h} \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(n)} g(x)\mathrm{d}x$$

Setzen wir den rechten Ausdruck in 3.1 ein und ersetzen überall in der Formel f durch $g \circ \varphi$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{h} \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(n)} g(x)\mathrm{d}x = \frac{g(\varphi(0)) + g(\varphi(n))}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} g(\varphi(\nu)) - \frac{n}{12} \cdot h^2 \cdot g''(\varphi(\xi))$$

für ein $\xi \in [0, n]$. Es gilt $\varphi(0) = a$ sowie $\varphi(n) = nh + a = n\frac{b-a}{n} + a = b$. Wegen $\xi \in [0, n]$ ist $\tau := \varphi(\xi) \in [a, b]$. Setzen wir dies ein und multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit h, so erhalten wir die Behauptung:

$$\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = h \cdot \left(\frac{g(a) + g(b)}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} g(a + \nu h) \right) - \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot g''(\tau)) = T(h) - \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot g''(\tau)$$

für ein $\tau \in [a, b]$.

4 Die allgemeine Eulersche Summationsformel

Wir möchten die Summationsformel für eine genügend oft stetig differenzierbare Funktion f erweitern, indem wir wie folgt induktiv Stammfunktionen der Funktion H definieren:

Definition 4.1

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $H_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt gegeben:

$(H.1)$ H_k ist Stammfunktion zu H_{k-1}, $k \geq 2$, und $H_1 := H$
$(H.2)$ $\int_0^1 H_k(x)\mathrm{d}x = 0$

Die Folge $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist damit eindeutig bestimmt, denn:
Ist H_{k-1} bereits gegeben, so ist durch $(H.1)$ die Funktion H_k bis auf Addition einer Konstanten bestimmt, welche schließlich durch $(H.2)$ festgelegt wird. Die Eindeutigkeit der H_k folgt also induktiv aufgrund der Definition $H_1 = H$.
Es sei angemerkt, dass der Begriff der Stammfunktion ohne Weiteres für H_2 keinen Sinn ergibt: Es kann zu einer sprungstetigen Funktion wie H_1 nämlich gar keine Stammfunktion geben. Wir meinen hier, dass H_2 auf allen offenen Intervallen $(k, k+1)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Stammfunktion zu H_1 ist und zusätzlich gilt: $\int_k^{k+1} H_2(x)\mathrm{d}x = 0$. Ist $H_2(x) := \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$ für $x \in (0, 1)$ mit 1-periodischer Fortsetzung auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, so sind alle genannten Bedingungen erfüllt. Wegen $\lim\limits_{x\to 0+} H_2(x) = \frac{1}{12} = \lim\limits_{x\to 1-} H_2(x)$ kann H_2 stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Bemerkung 4.2

Für $k \geq 2$ ist jedes H_k auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, denn: H_2 ist stetig nach Konstruktion und H_k für $k \geq 3$ ist als Stammfunktion einer stetigen Funktion sogar differenzierbar (und damit stetig).

Bemerkung 4.3

Alle H_k haben Periode 1. Für $H_1 = H$ ist das klar und H_2 wurde so konstruiert. Sei $k \geq 3$ und die Behauptung für H_{k-1} bereits gezeigt, so folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$H_k(x+1) - H_k(x) \overset{(H.1)}{=} \int\limits_x^{x+1} H_{k-1}(t)\mathrm{d}t \overset{IV+(*)}{=} \int\limits_0^1 H_{k-1}(t)\mathrm{d}t \overset{(H.2)}{=} 0$$

In $(*)$ kam Analysis II - Aufgabe 1.2 für stetige periodische Funktionen zum Einsatz.

Bemerkung 4.4

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ergänzungsregel $(-1)^k H_k(1-x) = H_k(x)$, denn:
Sei $H_k^*(x) := (-1)^k H_k(1-x)$. Dann gilt:

$(H.0^*)$ $H_1 = H_1^*$, denn:
Sei oBdA $x \in (0,1)$, denn H_1 ist 1-periodisch (Bem. 4.3) und für $x = 0$ ist die Aussage klar. Dann folgt:

$$H_1^*(x) = -H_1(1-x) = -\left((1-x) - \underbrace{\lfloor 1-x \rfloor}_{=0} - \frac{1}{2}\right) = x \ - \ \frac{1}{2} = x - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=0} - \frac{1}{2} = H_1(x)$$

$(H.1^*)$ H_k^* ist Stammfunktion zu H_{k-1}^*, $k \geq 2$, denn:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_k^*(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((-1)^k H_k(1-x)\Big) = (-1)^{k-1} H_{k-1}(1-x) = H_{k-1}^*(x)$$

$(H.2^*)$ Es gilt stets $\int_0^1 H_k^*(x)\mathrm{d}x = 0$. Für $k = 1$ folgt dies wegen $H_1^* = H_1$. Für $k \geq 2$ sieht man dies wie folgt ein:

$$\int\limits_0^1 H_k^*(x)\mathrm{d}x = (-1)^{k-1} \int\limits_0^1 (-1) H_k(1-x)\mathrm{d}x \overset{t \mapsto 1-t}{=} (-1)^{k-1} \int\limits_1^0 H_k(t)\mathrm{d}t = (-1)^k \int\limits_0^1 H_k(x)\mathrm{d}x = 0$$

Aus der Eindeutigkeit der H_k durch Definition 4.1 und weil $(H_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ die gleichen Eigenschaften aufweist, folgt für alle $k \in \mathbb{N}$: $H_k^* = H_k$ und somit die Ergänzungsregel.

Bemerkung 4.5

Für ungerades k folgt aus Bemerkung 4.4: $H_k(n) = 0$ für $n \in \mathbb{Z}$, denn:

$$H_k(n) = (-1)^k H_k(1-n) \overset{H_k \ per.}{=} -H_k(n)$$

Bemerkung 4.6

Gerne würden wir $H_k(0)$ nun für $k \in 2\mathbb{N}$ berechnen. Dazu zeigen wir per Induktion, dass für $x \in (0,1)$ gilt: $H_k = \frac{1}{k!}B_k$, wobei B_k das k-te Bernoullipolynom bezeichne (vgl. Vortrag 8).

Induktionsanfang: Für $k = 1$ erhält man:
$H_1(x) = x - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=0} - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} = \frac{1}{1!} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1!}B_1(x)$

Induktionsschritt: $(k-1) \to k$ (beachte: für $k > 1$ ist $H_k(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$)

$$H_k \overset{(H.1)}{\in} \int H_{k-1}(x)\mathrm{d}x \overset{IV}{=} \int \frac{B_{k-1}(x)}{(k-1)!}\mathrm{d}x \overset{(B.1)}{\ni} \frac{B_k}{k!}$$

Wir sehen: $H_k(x)$ und $\frac{B_k(x)}{k!}$ unterscheiden sich nur um eine Konstante c. Diese ist 0, denn:

$$0 \overset{(H.2)}{=} \int_0^1 H_k(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{B_k(x)}{k!} + c\ \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{B_k(x)}{k!}\mathrm{d}x}_{=0\ (B.2)} + \int_0^1 c\ \mathrm{d}x = c$$

Das bedeutet also $H_k(x) = \frac{B_k(x)}{k!}$ für $x \in (0,1)$.

Da für $k > 1$ die Funktion $H_k(x)$ stetig ist, können wir nun für diese k über die Bernoullipolynome die Werte $H_k(0)$ über $\frac{B_k(0)}{k!}$ berechnen:
$H_2(0) = \frac{1}{12}$, $H_4(0) = \frac{1}{4!30}$, $H_6(0) = \frac{1}{6!42}$ (vgl. Vortrag 8)

Wir kommen nun zu folgender Verallgemeinerung der Summationsformel:

Satz 4.7 (Allgemeine Eulersche Summationsformel)

Ist $f \in C^{2k+1}([1,n])$, $k \geq 0$, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(f(1) + f(n)\right) + \sum_{i=1}^{k} \left[H_{2i}(0)f^{(2i-1)}(x)\right]_1^n + R(f)$$

mit

$$R(f) = \int_1^n H_{2k+1}(x)f^{(2k+1)}(x)\mathrm{d}x$$

Beweis

Wir beweisen die Formel mit vollständiger Induktion. Für $k = 0$ ergibt sich die einfache Summationsformel (Satz 2.2). Man beachte, dass dann die Summe auf der rechten Seite der Gleichung von $i = 1$ bis $k = 0$ aufsummiert, was eine leere Summe ergibt.
Sei also $k \geq 1$ und die Behauptung für $k - 1 \in \mathbb{N}$ wahr. Es folgt mit partieller Integration von $R(f)$ unter Beachtung der Periodizität der H_j und $H_j(0) = 0$ wenn j ungerade (Bemerkung 4.5):

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) \overset{IV}{=} \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \ + \ \frac{1}{2}\left(f(1) + f(n)\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \left[H_{2i}(0)f^{(2i-1)}(x)\right]_1^n + R(f)$$

Zweimaliges partielles Integrieren im Term $R(f)$ ergibt:

$$R(f) = \int\limits_1^n H_{2k-1}(x) f^{(2k-1)}(x)\mathrm{d}x = \Big[H_{2k}(x) f^{(2k-1)}(x)\Big]_1^n - \int\limits_1^n H_{2k}(x) f^{(2k)}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big[H_{2k}(x) f^{(2k-1)}(x)\Big]_1^n - \Big[H_{2k+1}(x) f^{(2k)}(x)\Big]_1^n + \int\limits_1^n H_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\mathrm{d}x$$

Wegen $H_{2k}(n) = H_{2k}(0)$ (Bem. 4.3) und $H_{2k+1}(n) = H_{2k+1}(0) = 0$ (Bem. 4.5) folgt:

$$R(f) = \Big[H_{2k}(0) f^{(2k-1)}(x)\Big]_1^n + \int\limits_1^n H_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\mathrm{d}x$$

Einsetzen dieses Audrucks von $R(f)$ in den obigen Term liefert die Behauptung.

Beispiel 4.8

Wir wollen zum Abschluss noch die Euler-Mascheroni Konstante γ mithilfe der Eulerschen Summationsformel näherungsweise berechnen.
Dazu betrachte man die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ und wende darauf Satz 4.7 mit $k = 1$ an:

$$\sum_{\nu=1}^n f(x) - \log(n) = \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(f(1) + f(n)\right) + \left[H_2(0) f^1(x)\right]_1^n + \int\limits_1^n H_3(x) f^{(3)}(x)\mathrm{d}x - \log(n)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - 6\int\limits_1^n \frac{H_3(x)}{x^4}\mathrm{d}x$$

Für $n \to \infty$ folgt also:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - 6\int\limits_1^\infty \frac{H_3(x)}{x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - 6\int\limits_1^n \frac{H_3(x)}{x^4}\mathrm{d}x - 6\int\limits_n^\infty \frac{H_3(x)}{x^4}\mathrm{d}x$$

Stellen wir die erste Gleichung nach $\int\limits_1^n \frac{H_3(x)}{x^4}\mathrm{d}x$ um und setzen diesen Ausdruck in die Formel für γ ein, so erhalten wir:

$$\gamma = \sum_{\nu=1}^n f(\nu) - \log(n) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - 6\int\limits_n^\infty \frac{H_3(x)}{x^4}\mathrm{d}x$$

Wir schätzen $|H_3|$ durch sein betragsmäßiges Maximum $\frac{1}{216}\sqrt{3}$ an der Stelle $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$ ab.
(Kurvendiskussion für $H_3(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$ auf dem Intervall $[0, 1]$)
Dann folgt wegen $\frac{1}{216}\sqrt{3} < \frac{1}{120}$:

$$\left|\int\limits_n^\infty \frac{H_3(x)}{x^4}\mathrm{d}x\right| < \left|\frac{1}{120} \cdot \left[\frac{1}{3x^3}\right]_n^\infty\right| = \frac{1}{360 \cdot n^3}$$

Für $n = 10$ erhält man folgende Näherung:

$$\gamma = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{10} \frac{1}{\nu} - \log(10) - \frac{1}{2 \cdot 10} + \frac{1}{12 \cdot 10^2}}_{=\frac{72571}{25200} - \log(10) \approx 0{,}57722} - \underbrace{6 \cdot \int_{10}^{\infty} \frac{H_3(x)}{x^4} \mathrm{d}x}_{\textit{im Betrag} < 1{,}7 \cdot 10^{-5}} = 0,57722 + R$$

mit $|R| < 10^{-4}$.

Bis heute ist nicht bekannt, ob die Euler-Mascheroni-Konstante γ rational oder irrational ist.