

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Bachelorarbeit

im Studiengang Mathematik

Über die Kategorienäquivalenz zwischen endlichen Fächern und normalen separierten torischen Varietäten

Leon Lang

August 2015

Betreuer:
Prof. Dr. Kay Wingberg

Zusammenfassung

Diese Arbeit gibt eine präzise Formulierung des folgenden Resultats: Es gibt eine Äquivalenz von Kategorien zwischen endlichen Fächern und normalen separierten torischen Varietäten. Dazu werden zunächst im Detail Kegel studiert und Eigenschaften wie Rationalität und strikte Konvexität eingeführt. Kegel sind dabei Teilmengen des \mathbb{R}^n , die sich als Menge der positiven Linearkombinationen endlich vieler vorgegebener Vektoren realisieren lassen. Im Anschluss wird betrachtet, wie einer gutartigen endlichen Ansammlung rationaler, strikt konvexer Kegel, sogenannter Fächer, eine normale, separierte, torische Varietät zugeordnet werden kann. Torische Varietäten, die wir in der Sprache der Schemata betrachten, tragen dabei eine Gruppenwirkung von einem in ihnen enthaltenen algebraischen Torus. Im letzten Abschnitt werden wir nach Übergang zur Kategorie der Prävarietäten skizzieren, dass diese funktorielle Zuordnung wesentlich surjektiv ist, das heißt dass jede normale separierte torische Varietät zu einer über diesen Funktor erhaltenen Varietät isomorph ist. Die wichtigsten Quellen für diese Arbeit sind [Ful], [Sch] und [Oda].

Abstract

This work gives a precise formulation of the following result: There is an equivalence of categories between finite fans and normal separated toric varieties. Therefore we first study in detail cones and their properties, such as being rational or strictly convex. Cones are defined to be subsets of \mathbb{R}^n which consist of the positive linear combinations of finitely many fixed vectors. Afterwards we study the possibility to associate a normal separated toric variety to a special kind of finite sets of rational, strictly convex cones, so called fans. Toric varieties, which we consider in the language of schemes, contain an algebraic torus which acts on them as a group scheme. In the last chapter we switch to the language of prevarieties and sketch that this functorial construction is essentially surjective: Every normal, separated toric variety is isomorphic to one which comes from the functor from fans to toric varieties. The main sources for this work are [Ful], [Sch] and [Oda].

Inhaltsverzeichnis

1	Formulierung der Kategorienäquivalenz	3
1.1	Die Kategorie (FAN) der Fächer	3
1.2	Die Kategorie (TOV) der torischen Varietäten	5
1.3	Kategorienäquivalenz (FAN) \rightarrow (TOV-NS)	8
2	Konvexe polyedrische Kegel	9
2.1	Das Dualitätstheorem	9
2.2	Seiten von Kegeln	10
2.3	Facetten von Kegeln	12
2.4	Die Kegel- und Seitenstruktur von σ^\vee	14
2.5	Rationale Kegel	19
2.6	Strikte Konvexität	21
3	Der Funktor (FAN) \rightarrow (TOV-NS)	22
3.1	Die affine torische Varietät eines Kegels	22
3.2	Die torische Varietät eines Fächers	25
3.3	X_Σ ist eine torische Varietät	29
3.4	Torische Morphismen	32
3.5	Normalität und Separiertheit	34
4	Torische Varietäten als Prävarietäten	38
4.1	Definition torischer Varietäten als Prävarietäten	38
4.2	Wesentliche Surjektivität im affinen Fall	39
4.3	Orbits, Seiten und offene Immersionen	43
4.4	Wesentliche Surjektivität im allgemeinen Fall	46
4.5	Ausblick	48
A	Grundlagen der algebraischen Geometrie	50
A.1	Grundlagen der Schematheorie	50
A.2	Grundlagen in der Theorie der Prävarietäten	53

Kapitel 1

Formulierung der Kategorienäquivalenz

Dieses Kapitel dient dazu, alle wesentlichen Begriffe dieser Arbeit zu definieren sowie eine Formulierung der Kategorienäquivalenz zwischen Fächern und torischen Varietäten anzugeben. Eventuell ist es etwas mühselig, so viele Definitionen in Folge zu lesen. Dem Leser sei deshalb nahegelegt, dieses Kapitel zunächst nur zu überfliegen, und dann bei Bedarf in späteren Kapiteln wieder auf die hier eingeführten Begriffe zurück zu kommen. Grundlegende Kenntnisse aus [Har, ch. 1-2] werden zum Verständnis vorausgesetzt. Wir verwenden die Konvention $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Quellen dieses Kapitels waren [Oda], [Ful] und für die Ausführungen über Gruppenschemata [Sta, Tag 022L].

1.1 Die Kategorie (FAN) der Fächer

Definition 1.1 (Gitter). Ein *Gitter* ist eine abelsche Gruppe N , die isomorph ist zu \mathbb{Z}^n für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt die *Dimension* des Gitters.

Ist N ein Gitter und sind b_1, \dots, b_n die Bilder der Standardbasisvektoren e_1, \dots, e_n unter einem Isomorphismus $\mathbb{Z}^n \rightarrow N$, so ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ offenbar eine Basis von N . Hat umgekehrt eine abelsche Gruppe N eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\mathbb{Z}^n \rightarrow N$, welcher $e_i \mapsto b_i$ erfüllt. Damit sind Gitter äquivalent charakterisiert als abelsche Gruppen mit endlicher Basis.

Um Kegel und schließlich Fächer zu definieren, brauchen wir mehr Struktur. Wir definieren $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Dies wird zu einem \mathbb{R} -Vektorraum durch $r(n \otimes r') := n \otimes (rr')$. Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von N , so ist die Abbildung $\varphi : N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, (\sum \lambda_i b_i) \otimes r \mapsto r \sum \lambda_i e_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}$) offenbar ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen. Wir betten N in $N_{\mathbb{R}}$ ein via $n \mapsto n \otimes 1$. Dies entspricht der üblichen Einbettung $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Weiter identifizieren wir N mit seinem Bild in $N_{\mathbb{R}}$ vermöge dieser Einbettung. Wir erhalten demnach $n \otimes r = r(n \otimes 1) = rn$ und sehen, dass $N_{\mathbb{R}}$ damit zu einem \mathbb{R} -Vektorraum mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ wird. Aufgrund der Invarianz der Dimension von Vektorräumen sehen wir damit insbesondere, dass die Dimension n des Gitters $N \cong \mathbb{Z}^n$ wohldefiniert ist.

Im Folgenden seien N, N' stets Gitter (nicht notwendig der gleichen Dimension) und $N_{\mathbb{R}}, N'_{\mathbb{R}}$ die Erweiterungen zu \mathbb{R} -Vektorräumen.

Definition 1.2 (Kegel, Rationaler Kegel, strikt konvexer Kegel).

- (i) Ein *konvexer polyedrischer Kegel* (kurz: Kegel) ist eine Menge der Form

$$\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_s) := \{r_1 v_1 + \dots + r_s v_s \mid r_i \geq 0\},$$

mit $v_1, \dots, v_s \in N_{\mathbb{R}}$. Die Elemente v_i heißen die Erzeuger des Kegels σ .

- (ii) Ein Kegel σ in $N_{\mathbb{R}}$ heißt *rational*, wenn es eine Darstellung $\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_s)$ gibt mit $v_1, \dots, v_s \in N$.

(iii) Wir nennen einen Kegel σ *strikt konvex*, wenn er keine Gerade durch den Ursprung enthält.

Es sei $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ die Gruppe der Gruppenhomomorphismen vom Gitter N nach \mathbb{Z} . Es sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von N . Dann können wir eine dazu duale Menge definieren als $\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subseteq M$, wobei b_i^* der eindeutige Gruppenhomomorphismus $N \rightarrow \mathbb{Z}$ ist, welcher $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ erfüllt. Ohne Beweis geben wir folgende Proposition an:

Proposition 1.3. *Es sei N ein Gitter mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. Dann ist die zugehörige duale Menge $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ eine Basis der abelschen Gruppe $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Insbesondere ist M wieder ein Gitter der gleichen Dimension wie N . \square*

Wir möchten $M_{\mathbb{R}}$ zum Dualraum von $N_{\mathbb{R}}$ machen. In Analogie zum Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n schreiben wir die Wirkung von M auf N folgendermaßen: Für $m \in M$, $n \in N$ setzen wir $(m, n) := m(n)$. Sind nun $\sum_i a_i b_i^* \in M_{\mathbb{R}}$, $\sum_j c_j b_j \in N_{\mathbb{R}}$ beliebig ($a_i, c_j \in \mathbb{R}$), dann definieren wir:

$$\left(\sum_i a_i b_i^*, \sum_j c_j b_j \right) = \sum_i a_i c_i.$$

Man zeigt leicht, dass damit tatsächlich $M_{\mathbb{R}}$ zum Dualraum von $N_{\mathbb{R}}$ wird. Zudem ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von N . Wir betrachten nun die Isomorphismen $N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bzw. $M_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche $b_i \mapsto e_i$ beziehungsweise $b_i^* \mapsto e_i$ erfüllen. Vermöge dieser Isomorphismen transformiert sich die Paarung $(\cdot, \cdot) : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ zum Standardskalarprodukt $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ohne Probleme können wir uns in unserer Vorstellung also auf den Anschauungsraum zurückziehen. Der Leser sei aber darauf hingewiesen, dass dieser hohe Abstraktionsgrad dennoch notwendig ist und wir nicht von vornherein mit \mathbb{Z}^n und \mathbb{R}^n arbeiten dürfen. Das liegt unter anderem daran, dass in der Theorie der torischen Varietäten sogenannte Charaktergitter auftreten, die meistens keinen ausgezeichneten Isomorphismus nach \mathbb{Z}^n besitzen. Wir können nun definieren:

Definition 1.4 (Duale Menge, Seiten von Kegeln). Es sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel.

(i) Die zu σ *duale Menge* in $M_{\mathbb{R}}$ ist definiert als

$$\sigma^\vee = \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid (u, v) \geq 0 \text{ für alle } v \in \sigma\}.$$

(ii) Eine Teilmenge $\tau \subseteq \sigma$ heißt *Seite* (Schreibweise: $\tau \preceq \sigma$), wenn es ein $u \in \sigma^\vee$ gibt mit

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma \mid (u, v) = 0\}.$$

Eine Seite $\tau \neq \sigma$ von σ heißt *echte Seite* ($\tau < \sigma$).

Man sollte sich Seiten von Kegeln tatsächlich vorstellen wie Ecken, Kanten oder Seitenflächen. Im Kapitel über Kegel werden wir sehen, dass diese Anschauung korrekt ist.

Definition 1.5 (Fächer). Ein *Fächer* (N, Σ) besteht aus einem Gitter N und einer nichtleeren endlichen Menge Σ von strikt konvexen rationalen Kegeln in $N_{\mathbb{R}}$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

(i) Ist $\sigma \in \Sigma$ und $\tau \preceq \sigma$, dann folgt $\tau \in \Sigma$.

(ii) Sind $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, dann ist $\sigma \cap \sigma'$ eine Seite sowohl von σ als auch von σ' und als solches nach (i) ein Element von Σ .

Das Gitter gehört also zum Fächer dazu, was sich auch in der Definition von Morphismen von Fächern widerspiegeln wird. Ist das Gitter aus dem Kontext aber klar, oder schlicht nicht relevant, dann schreiben wir auch Σ statt (N, Σ) .

Wir definieren nun Morphismen zwischen Fächern. Dazu brauchen wir zunächst eine weitere Bezeichnung: Ist $\varphi : N \rightarrow N'$ ein Gruppenhomomorphismus, so sei $\varphi_{\mathbb{R}} : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$ die eindeutige Fortsetzung zu einer \mathbb{R} -linearen Abbildung. Um die Notation nicht zu sehr aufzublähen, schreiben wir kurz wieder φ für $\varphi_{\mathbb{R}}$.

Definition 1.6 (Morphismus von Fächern).

- (i) Es seien (N, Σ) und (N', Σ') Fächer. Ein *Morphismus von Fächern* $\varphi : (N, \Sigma) \rightarrow (N', \Sigma')$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : N \rightarrow N'$, der zusätzlich verträglich ist mit den Fächern, das heißt: Für jeden Kegel $\sigma \in \Sigma$ existiert ein Kegel $\sigma' \in \Sigma'$, sodass für die Skalarerweiterung von φ gilt: $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma'$.
- (ii) Sind $\varphi : (N, \Sigma) \rightarrow (N', \Sigma')$, $\psi : (N', \Sigma') \rightarrow (N'', \Sigma'')$ zwei Fächermorphismen, so ist ihre Komposition definiert als die übliche Komposition von Abbildungen: $(\psi \circ \varphi)(n) := \psi(\varphi(n))$.

Offenbar ist die Komposition zweier Fächermorphismen wieder ein Fächermorphismus. Die Assoziativität der Komposition vererbt sich von der Assoziativität bei beliebigen Abbildungen von Mengen. Die Identität auf N ist offenbar die Identität eines beliebigen Fächers (N, Σ) . Damit haben wir eine Kategorie: Die Kategorie (FAN) ist definiert als die Kategorie mit Fächern als Objekten und Morphismen von Fächern als Morphismen.

1.2 Die Kategorie (TOV) der torischen Varietäten

Definition 1.7 (Monoid, Monoidhomomorphismus, endlich erzeugtes Monoid).

- (i) Ein *additives Monoid* ist eine Menge S zusammen mit einer kommutativen und assoziativen Verknüpfung $+$: $S \times S \rightarrow S$, zu welcher es ein neutrales Element 0 gibt. Da wir nur mit additiven Monoiden zu tun haben, sagen wir auch kurz Monoid für ein additives Monoid.
- (ii) Ein *Monoidhomomorphismus* ist eine Abbildung zwischen Monoiden, die sowohl die Addition, als auch das neutrale Element respektiert.
- (iii) Ein Monoid S heißt *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Teilmenge $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq S$ gibt mit $\mathbb{N}\mathcal{A} := \{\sum_i \lambda_i m_i \mid \lambda_i \in \mathbb{N}\} = S$

Jede abelsche Gruppe ist ein Beispiel eines Monoids. Die natürlichen Zahlen (nach unserer Konvention mit 0) sind ein Monoid. Wir werden im folgenden erfahren, wie man Polynomringe über beliebigen Monoiden erhält. Als Spezialfall wird sich der altbekannte Polynomring $R[X_1, \dots, X_n] = R[\mathbb{N}^n]$ ergeben. Sei also R ein beliebiger kommutativer Ring mit 1 .

Definition 1.8 (Monoidalgebra). Sei S ein Monoid. Schreiben wir statt $m \in S$ alternativ $\chi^m \in S$, so können wir die Verknüpfung intuitiv multiplikativ schreiben: $\chi^m \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$. Wir definieren dann die *Monoidalgebra* $R[S]$ wie folgt:

$R[S]$ ist ein R -Modul mit Basis $S = \{\chi^m \mid m \in S\}$. Die Multiplikation wird durch Forderung der Rechengesetze in einer R -Algebra definiert durch die Multiplikation auf S . Genauer: Sind $\sum a_m \chi^m$, $\sum b_m \chi^m \in R[S]$, so setzen wir

$$\left(\sum_m a_m \chi^m \right) \cdot \left(\sum_m b_m \chi^m \right) = \sum_m \left(\sum_{k+l=m} a_k b_l \right) \chi^m.$$

Die Elemente χ^m für $m \in S$ nennen wir Monome der Monoidalgebra. Wir sagen gelegentlich auch Polynome zu Elementen der Monoidalgebra.

Bemerkung 1.9. Die multiplikative Einheit von $R[S]$ ist $1 = \chi^0$. Erzeugt $\{m_i\}$ das Monoid S , so erzeugt $\{\chi^{m_i}\}$ die R -Algebra $R[S]$. Wir können R in $R[S]$ einbetten, in dem wir $r \in R$ mit $r \cdot \chi^0 = r \cdot 1 \in R[S]$ identifizieren. Setzen wir $S = \mathbb{N}^n$, so erhalten wir den Isomorphismus $R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R[\mathbb{N}^n]$, gegeben durch $X_i \mapsto \chi^{e_i}$. Monoidalgebren sind also tatsächlich Verallgemeinerungen von üblichen Polynomringen (häufig werden Polynomringe gerade als Spezialfälle von Monoidalgebren konstruiert).

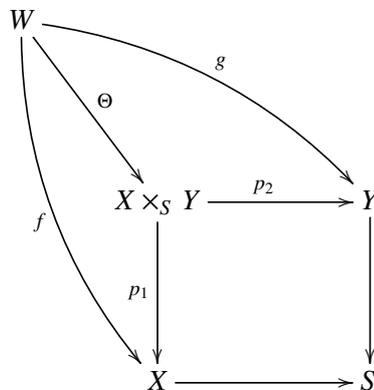
Die Monoidalgebra $R[S]$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft, die wir im Verlaufe des Textes ohne weitere Erwähnung verwenden werden:

Proposition 1.10. *Es sei R' eine R -Algebra und $\sigma : S \rightarrow R'$ ein Monoidhomomorphismus, wobei R' als Monoid bezüglich der Multiplikation aufgefasst werde. Dann existiert ein eindeutig bestimmter R -Algebrenhomomorphismus $\Phi : R[S] \rightarrow R'$ mit $\Phi(\chi^m) = \sigma(m)$ für alle $s \in S$. \square*

Beispiel 1.11 (Laurent-Polynome). Wir geben ein Beispiel einer Monoidalgebra: Sei $M \cong \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Ist $\{m_1, \dots, m_n\}$ eine Basis, so erhält man einen Isomorphismus von R -Algebren $R[M] \cong R[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$ via $\chi^{m_i} \mapsto X_i$. Demnach ist $R[M]$ isomorph zur R -Algebra der sogenannten Laurent-Polynome.

Um Torische Varietäten definieren zu können, müssen wir zunächst algebraische Tori definieren, und für algebraische Tori brauchen wir den Begriff des Gruppenschemas. Wir wiederholen dafür zunächst den Begriff des Faserprodukts, das wir im Beispiel eben bereits verwendet haben: Sind $X \rightarrow S, Y \rightarrow S$ Schemata über S , so ist $X \times_S Y$ ein Schema über S zusammen mit Projektionen $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$ über S , sodass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Sei W ein beliebiges Schema über S und $f : W \rightarrow X, g : W \rightarrow Y$ Morphismen von Schemata über S , so gibt es genau einen Morphismus $\Theta : W \rightarrow X \times_S Y$ über S , sodass das folgende Diagramm kommutiert:



In dieser Arbeit verwenden wir die Schreibweise $[f, g] := \Theta$. Dies rechtfertigt sich aufgrund der Eindeutigkeit von Θ , die in der universellen Eigenschaft gefordert wird.

Definition 1.12 (Gruppenschema, Morphismus von Gruppenschemata).

- (i) Sei S ein Schema. Ein *Gruppenschema* über S ist ein Paar (G, m) , wobei G ein Schema über S und $m : G \times_S G \rightarrow G$ ein Morphismus von Schemata über S ist, sodass folgendes gilt: Für jedes Schema V über S ist das Paar $(G(V), m(V))$ eine Gruppe. Dabei ist $G(V) := \text{Mor}_S(V, G)$ die Menge der S -Morphismen von V nach G und $m(V) : G(V) \times G(V) \rightarrow G(V)$ die Abbildung $(f, g) \mapsto m \circ [f, g]$.
- (ii) Ein *Morphismus von Gruppenschemata* $(G, m), (G', m')$ über S ist ein Morphismus $\varphi : G \rightarrow G'$ über S , sodass die induzierten Abbildungen $\varphi(V) : G(V) \rightarrow G'(V), f \mapsto \varphi \circ f$, Gruppenschemahomomorphismen sind.

Offenbar bilden Gruppenschemata über einem festen Grundschemata S auf diese Weise eine Kategorie. Aus der Definition eines Gruppenschemas und der universellen Eigenschaft des Faserprodukts folgt außerdem unmittelbar, dass die Gruppenstruktur in folgendem Sinne funktoriell in V ist: Ist $f : V \rightarrow V'$ ein Morphismus über S , dann ist $f^* : G(V') \rightarrow G(V)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 1.13 (Wirkung eines Gruppenschemas). Es sei X ein Schema über S und G ein Gruppenschema über S .

Eine *Wirkung* von G auf X ist ein Morphismus $a : G \times_S X \rightarrow X$ über S , sodass für alle Schemata V über S die Abbildung $a(V) : G(V) \times X(V) \rightarrow X(V)$, $(f, g) \mapsto a \circ [f, g]$, eine Gruppenwirkung der Gruppe $G(V)$ auf der Menge $X(V)$ ist.

Torische Varietäten werden klassischerweise über algebraisch abgeschlossenen Körpern behandelt, auch deswegen, weil sich nur dann die Kategorienäquivalenz, die wir in dieser Arbeit erläutern, zeigen lässt. Sei also von nun an k ein fixierter algebraisch abgeschlossener Körper.

Sei M ein Gitter. Das affine Schema $T = \text{Spec}(k[M])$ lässt sich ausstatten mit einem Morphismus $m : T \times_k T \rightarrow T$ über k . Dieser sei die Entsprechung des eindeutigen k -Algebrenhomomorphismus $k[M] \rightarrow k[M] \otimes_k k[M]$, der auf den Monomen gegeben ist durch $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$ für $u \in M$. Es lässt sich zeigen, dass T damit zu einem Gruppenschema über $\text{Spec}(k)$ wird. Das werden wir in Proposition 3.15 sehen.

Definition 1.14 (Algebraischer Torus). Ein *algebraischer Torus* – oder kurz Torus – T ist ein Gruppenschema über k , das als Gruppenschema isomorph ist zu $(\text{Spec}(k[M]), m)$ für ein Gitter M .

Definition 1.15 (Torische Varietät, Äquivarianter Morphismus).

- (i) Sei T ein beliebiger Torus. Eine *torische Varietät* ist ein integres Schema X von endlichem Typ über k zusammen mit einer offenen Immersion $i : T \rightarrow X$ über k , sodass gilt: Der Torus T wirkt auf X und weitet damit die Wirkung von T auf sich selbst aus, es kommutiert also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \longrightarrow & X \\ \text{id} \times i \uparrow & & \downarrow i \\ T \times T & \longrightarrow & T \end{array}$$

Wir verwenden die Schreibweise $i : T \rightarrow X$ um anzudeuten, dass es sich bei X um eine torische Varietät mit Torus T handelt. Häufig identifizieren wir T mit seinem Bild in X , sodass folgende Definition sinnvoll ist:

- (ii) Es seien $i : T \rightarrow X$ und $j : T' \rightarrow X'$ zwei torische Varietäten. Ein *äquivarianter Morphismus* (oder torischer Morphismus) $f : X \rightarrow X'$ ist ein Morphismus von Schemata über k , der mit der Wirkung der Tori in folgendem Sinne verträglich ist: Die Einschränkung $f|_T : T \rightarrow T'$ ist ein wohldefinierter Morphismus von Gruppenschemata, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T \times_k X & \xrightarrow{f|_T \times f} & T' \times_k X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Dabei sind der linke und rechte Pfeil die jeweiligen Wirkungen und nicht etwa die Projektionen auf die zweite Komponente.

Man beachte bei der Definition einer torischen Varietät $i : T \rightarrow X$: X ist integer, also insbesondere irreduzibel, weswegen jede nichtleere offene Teilmenge dicht liegt – Folglich auch das Bild der offenen Immersion i .

Um zu zeigen, dass es sich bei torischen Varietäten um eine Kategorie handelt, müssen wir lediglich nachvollziehen, dass Hintereinanderausführungen von äquivarianten Morphismen wieder äquivariant sind. Das folgt unmittelbar aus folgender allgemeinen Proposition, die wir ohne Beweis angeben:

Proposition 1.16. *Seien X_1, X_2, X_3 und Y_1, Y_2, Y_3 sechs S -Objekte in einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} . Es seien S -Morphismen $f_1 : X_1 \rightarrow X_2$, $f_2 : X_2 \rightarrow X_3$ und $g_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$, $g_2 : Y_2 \rightarrow Y_3$ gegeben. Dann kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times_S Y_1 & \xrightarrow{f_1 \times g_1} & X_2 \times_S Y_2 & \xrightarrow{f_2 \times g_2} & X_3 \times_S Y_3 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & (f_2 \circ f_1) \times (g_2 \circ g_1) \end{array}$$

Mit anderen Worten: $\times_S : (\mathcal{C}/S) \times (\mathcal{C}/S) \rightarrow (\mathcal{C}/S)$ ist ein Funktor. □

Die Kategorie (TOV) ist dann definiert als die Kategorie mit torischen Varietäten als Objekten und torischen Morphismen als Morphismen.

1.3 Kategorienäquivalenz (FAN) \rightarrow (TOV-NS)

Wir haben bisher zwei Kategorien (FAN) und (TOV) definiert, die auf den ersten Blick überhaupt keine Beziehung zueinander zu haben scheinen. Nachdem wir in Kapitel 2 genauer Kegel studieren, werden wir jedoch in Kapitel 3 einen Funktor $X : (\text{FAN}) \rightarrow (\text{TOV})$ konstruieren und zeigen, dass er treu. Es wird relativ leicht sein, einzusehen, dass sein Bild innerhalb der normalen und separierten torischen Varietäten liegt. Die volle Unterkategorie, die durch diese Varietäten gegeben wird, nennen wir (TOV-NS). In Kapitel 4 werden wir dann skizzieren, dass der induzierte Funktor (FAN) \rightarrow (TOV-NS) zumindest über dem Grundkörper \mathbb{C} wesentlich surjektiv, also eine Kategorienäquivalenz ist.

Kapitel 2

Konvexe polyedrische Kegel

Wir fixieren wie in Kapitel 1 zwei zueinander duale Gitter N und $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ der Dimension n und bezeichnen mit $N_{\mathbb{R}}$ und $M_{\mathbb{R}}$ die zueinander dualen Erweiterungen zu \mathbb{R} -Vektorräumen der Dimension n . Durch Wahl einer Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von N und der zugehörigen dualen Basis $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ bekommen wir Isomorphismen $N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $M_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche uns die euklidische Topologie auf $N_{\mathbb{R}}$ und $M_{\mathbb{R}}$ induzieren. Da \mathbb{R} -lineare Isomorphismen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stets Homöomorphismen sind, ist die Wahl dieser Topologien nicht abhängig von der Wahl der Basis. Gelegentlich identifizieren wir $N_{\mathbb{R}}$ nach Wahl einer Basis mit $M_{\mathbb{R}}$ durch $b_i \mapsto b_i^*$. In diesen Situationen können wir auch von einer Norm eines Vektors $v \in N_{\mathbb{R}}$ sprechen. Wir hoffen, dass diese Identifizierung (die von den Basen abhängt!) aus dem Kontext ersichtlich wird, auch wenn wir sie nicht explizit durchführen. Hauptquelle dieses Kapitels ist [Ful, Chap. 1.2].

2.1 Das Dualitätstheorem

Wir erinnern daran, dass Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ aus nichtnegativen Linearkombinationen endlich vieler Vektoren in $N_{\mathbb{R}}$ bestehen, und dass ihre duale Menge σ^\vee aus allen Elementen in $M_{\mathbb{R}}$ besteht, deren Wirkung auf Elementen aus σ stets nichtnegativ ist, siehe auch Definitionen 1.2 und 1.4.

Ziel dieses Paragraphen ist es, folgendes, viel verwendetes Lemma zu beweisen und daraus das Dualitätstheorem zu folgern:

Lemma 2.1. *Sei σ ein Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und $v_0 \notin \sigma$. Dann existiert ein $u_0 \in \sigma^\vee$ mit $(u_0, v_0) < 0$.*

Um dieses Lemma zeigen zu können, braucht man unter anderem die Abgeschlossenheit von Kegeln bezüglich der euklidischen Topologie. Ein Beweis dieser erstaunlicherweise nichttrivialen Aussage befindet sich zum Beispiel in [daw]. Wir weisen außerdem auf die Trivialität hin, dass Kegel konvex sind, das heißt: Sind $v, v' \in \sigma$ für einen Kegel σ und ist $0 \leq \lambda \leq 1$, dann ist auch $(1-\lambda)v + \lambda v' \in \sigma$. Daher können wir auf Kegel den folgenden Projektionssatz anwenden:

Lemma 2.2 (Projektionssatz). *Sei X ein Hilbertraum über \mathbb{R} mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_X$. Sei $A \subset X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es genau eine Abbildung $P : X \rightarrow A$ mit*

$$\|x - P(x)\|_X = \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|_X \quad \text{für alle } x \in X. \quad (2.1)$$

Für jedes $x \in X$ ist der Punkt $P(x) \in A$ äquivalent charakterisiert durch die Eigenschaft

$$(x - P(x), y - P(x))_X \leq 0 \quad \text{für alle } y \in A. \quad (2.2)$$

Beweis [Alt, Projektionssatz 2.3] □

Wir beweisen nun Lemma 2.1:

Beweis Sei $v_0 \notin \sigma$. Da σ abgeschlossen und konvex ist, finden wir nach Lemma 2.2 ein Element $P(v_0) \in \sigma$, das den Abstand zu v_0 minimiert. Wir setzen $u_0 = P(v_0) - v_0$. Für $\lambda \geq 0$ setzen wir $\lambda P(v_0) \in \sigma$ in (2.2) ein und erhalten somit:

$$0 \geq (v_0 - P(v_0), \lambda P(v_0) - P(v_0)) = (\lambda - 1)(v_0 - P(v_0), P(v_0)).$$

Setzen wir hierin einmal $\lambda > 1$ und einmal $\lambda < 1$, so sehen wir $(v_0 - P(v_0), P(v_0)) = 0$. Diesen Umstand werden wir zwei mal verwenden:

Zunächst zeigen wir $(u_0, v_0) < 0$. Wegen $v_0 \notin \sigma$ ist $P(v_0) \neq v_0$, also $\|u_0\| > 0$. Es folgt:

$$0 < \|u_0\|^2 = (u_0, u_0) = (P(v_0) - v_0, P(v_0) - v_0) = (P(v_0) - v_0, -v_0).$$

Daraus folgt sofort $(u_0, v_0) < 0$.

Wir zeigen nun $u_0 \in \sigma^\vee$. Ist $v \in \sigma$, so gilt wegen (2.2) und obiger Feststellung:

$$0 \geq (v_0 - P(v_0), v - P(v_0)) = (v_0 - P(v_0), v) = -(u_0, v),$$

also die Behauptung $(u_0, v) \geq 0$. □

Aus 2.1 können wir das zentrale *Dualitätstheorem* folgern:

Proposition 2.3 (Dualitätstheorem). *Ist σ ein Kegel, so folgt $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$*

Beweis Sei $v \in \sigma$ und $u \in \sigma^\vee$. Nach Definition von σ^\vee ist $(u, v) \geq 0$. Da $u \in \sigma^\vee$ beliebig war, ist also $v \in (\sigma^\vee)^\vee$. Sei umgekehrt $v \notin \sigma$. Dann gibt es nach Lemma 2.1 ein $u \in \sigma^\vee$ mit $(u, v) < 0$. Also ist $v \notin (\sigma^\vee)^\vee$. □

2.2 Seiten von Kegeln

In dieser Sektion werden wir in einer Proposition grundlegende Aussagen über Seiten von Kegeln beweisen. Sie sind definiert als Schnitte eines Kegels mit Hyperebenen, die vollständig „auf einer Seite“ des Kegels liegen, siehe auch Definition 1.4. Wir verwenden in der restlichen Arbeit folgende Konvention: Wenn wir sagen, $\tau = \sigma \cap u^\perp$ sei eine Seite von σ , so meinen wir damit implizit $u \in \sigma^\vee$, wenn es der Kontext nicht verbietet. Man beachte, dass $\sigma = \sigma \cap 0^\perp$ selbst eine Seite ist. Wir definieren zunächst die Dimension eines Kegels:

Definition 2.4 (Dimension eines Kegels). Sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel. Dann definieren wir seine *Dimension* als die Dimension des von σ aufgespannten Untervektorraums von $N_{\mathbb{R}}$:

$$\dim(\sigma) := \dim_{\mathbb{R}}(\text{span}(\sigma))$$

Proposition 2.5. *Sei in der gesamten Proposition $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel. Dann folgt:*

- (i) *Jeder Unterraum von $N_{\mathbb{R}}$, der ganz in σ enthalten ist, liegt im Durchschnitt aller Seiten von σ .*
- (ii) *Jede Seite von σ ist selbst ein Kegel.*
- (iii) *σ hat nur endlich viele Seiten.*
- (iv) *Der Schnitt beliebig vieler Seiten von σ ist wieder eine Seite von σ .*
- (v) *Eine Seite einer Seite von σ ist wieder eine Seite von σ .*

- (vi) Sind $\tau, \tau' \subseteq \sigma$ Seiten und ist $\tau \subseteq \tau'$, dann ist τ eine Seite von τ' .
- (vii) Sind $\tau \subseteq \tau'$ zwei Seiten des Kegels σ und ist $\dim(\tau) = \dim(\tau')$, dann ist bereits $\tau = \tau'$.
- (viii) Sei $\tau = \sigma \cap u^\perp$ eine Seite von σ . Sind $v, v' \in \sigma$ mit $v + v' \in \tau$, dann ist bereits $v \in \tau$ und $v' \in \tau$.

Beweis

- (i) Sei W ein Unterraum von $N_{\mathbb{R}}$, der in σ enthalten ist, und $\tau = \sigma \cap u^\perp$ eine beliebige Seite von σ , wobei $u \in \sigma^\vee$. Insbesondere ist $(u, w) \geq 0$ für alle $w \in W$. Ist $w \in W$, so rechnen wir

$$0 = (u, 0) = (u, w) + (u, -w).$$

Mit $w \in W$ ist auch $-w \in W$. Daher sind beide Summanden rechts nicht-negativ, also müssen sie verschwinden. Wir erhalten $W \subseteq u^\perp$, also wegen $W \subseteq \sigma$ die Behauptung $W \subseteq \sigma \cap u^\perp = \tau$. \square

- (ii) Sei $\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_s)$ und die Seite $\tau \leq \sigma$ gegeben durch $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Wir nehmen an, dass die Erzeuger von σ so durchnummeriert sind, dass $(u, v_1) = (u, v_2) = \dots = (u, v_k) = 0$ und $(u, v_{k+1}), \dots, (u, v_s) > 0$. Wir behauptet, dass dann $\tau = \text{Cone}(v_1, \dots, v_k)$ ist:

Sei $v = \sum_{i=1}^s r_i v_i \in \tau$ beliebig. Dann ist

$$0 = (u, v) = \sum_{i=1}^s r_i (u, v_i) = \sum_{i=k+1}^s r_i (u, v_i).$$

Es folgt $r_i = 0$ für alle $i \geq k + 1$ und somit $v \in \text{Cone}(v_1, \dots, v_k)$.

Die andere Richtung ist klar. \square

- (iii) Aus dem Beweis der vorherigen Aussage sieht man, dass σ nicht mehr als $2^s = \#\text{Pot}(\{v_1, \dots, v_s\})$ Seiten hat. \square

- (iv) Seien $\tau_i = \sigma \cap u_i^\perp$ beliebige (endlich viele) Seiten von σ . Dann ist $\bigcap \tau_i = \sigma \cap (\sum u_i)^\perp$ auch eine Seite von σ . Die Gleichheit sieht man folgendermaßen ein:

Sei $v \in \bigcap \tau_i$, d.h. $v \in \sigma$ und $(u_i, v) = 0$ für alle i . Dann ist aber auch $(\sum u_i, v) = 0$ und folglich $v \in \sigma \cap (\sum u_i)^\perp$. Ist umgekehrt $v \in \sigma \cap (\sum u_i)^\perp$, so ist

$$0 = \left(\sum u_i, v \right) = \sum (u_i, v),$$

wobei in der Summe rechts per Definition von $u_i \in \sigma^\vee$ jeder Summand nichtnegativ ist. Es folgt $(u_i, v) = 0$ für alle i und somit $v \in \bigcap \tau_i$. \square

- (v) Sei $\tau = \sigma \cap u^\perp \leq \sigma$ und $\gamma = \tau \cap (u')^\perp \leq \tau$. Wir wollen zeigen, dass für großes $p \in \mathbb{R}$ die Gleichheit $\gamma = \sigma \cap (u' + pu)^\perp$ besteht. Damit dies zum Ziel führen kann, müssen wir zunächst $u' + pu \in \sigma^\vee$ erreichen:

Wir setzen $p \geq \max \left\{ \frac{-(u', v_i)}{(u, v_i)} \right\}$, wobei wir das Maximum über alle i mit $(u, v_i) \neq 0$ bilden. Für beliebiges $v = \sum r_i v_i \in \sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_s)$ folgt dann

$$(u' + pu, v) = \sum r_i [(u', v_i) + p(u, v_i)] \geq \sum r_i [(u', v_i) - (u', v_i)] = 0.$$

Wir haben also wie gewünscht $u' + pu \in \sigma^\vee$ für genügend großes p . (Man beachte in der obigen Gleichheitskette: Es ist $(u', v_i) \geq 0$ für alle i mit $(u, v_i) = 0$ bzw. $v_i \in \tau$).

Wir wollen nun p weiter vergrößern, sodass zusätzlich $\gamma = \sigma \cap (u' + pu)^\perp$ ist. Für $p_1 \leq p_2$ stellen wir dafür zunächst fest: $\sigma \cap (u' + p_2 u)^\perp \subseteq \sigma \cap (u' + p_1 u)^\perp$. Da beides Seiten von σ sind, und

es davon nach (iii) nur endlich viele gibt, können wir p also so groß wählen, dass der Ausdruck $\sigma \cap (u' + pu)^\perp$ bezüglich Inklusion minimal ist. Wir behaupten, dass dieses p das Gewünschte erfüllt:

Sei $v \in \gamma = \sigma \cap u^\perp \cap (u')^\perp$. Dann ist $(u, v) = (u', v) = 0$, also auch $(u' + pu, v) = 0$ und somit $v \in \sigma \cap (u' + pu)^\perp$. Sei umgekehrt $v \in \sigma$ und $0 = (u' + pu, v) = (u', v) + p(u, v)$. Wir müssen $(u', v) = (u, v) = 0$ zeigen. Angenommen, $(u', v) \neq 0$. Falls $(u, v) = 0$ ist, hat man sofort einen Widerspruch zur vorausgesetzten Gleichung. Falls $(u, v) \neq 0$ ist, können wir p noch weiter vergrößern, sodass die Gleichung nicht mehr gilt. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\sigma \cap (u' + pu)^\perp$ bereits minimal war. \square

- (vi) Schreiben wir $\tau = \sigma \cap u^\perp$, so folgt wegen $\tau \subseteq \tau'$ auch $\tau = \tau' \cap u^\perp$. Wegen $\tau' \subseteq \sigma$ ist $\sigma^\vee \subseteq \tau'^\vee$ und somit $u \in \tau'^\vee$. Das bedeutet gerade, dass τ eine Seite von τ' ist. \square
- (vii) Wir schreiben $\tau = \sigma \cap u^\perp$ und betrachten ein $v \in \tau'$. Wegen der Dimensionsgleichheit ist $\text{span}(\tau) = \text{span}(\tau')$ und daher $v \in \text{span}(\tau)$. Aber wegen $\tau \subseteq u^\perp$ ist auch $\text{span}(\tau) \subseteq u^\perp$ und somit $v \in u^\perp$. Also ist $v \in \tau$. Die andere Inklusion gilt nach Voraussetzung. \square
- (viii) Wegen $v, v' \in \sigma$ und $u \in \sigma^\vee$ ist $(u, v) \geq 0$ und $(u, v') \geq 0$. Zusammen mit $(u, v + v') = 0$ ist das aber nur möglich, wenn bereits $(u, v) = 0$ und $(u, v') = 0$ gilt, was die Behauptung zeigt. \square

2.3 Facetten von Kegeln

Definition 2.6 (Kodimension, Facette). Ist σ ein Kegel und τ eine Seite, so definieren wir dessen *Kodimension* in σ als

$$\text{codim}(\tau \leq \sigma) := \dim(\sigma) - \dim(\tau).$$

Proposition 2.5 (ii) rechtfertigt diese Definition, denn danach ist auch eine Seite wieder ein Kegel und seine Dimension ist wohldefiniert. Eine *Facette* ist dann definiert als eine Seite der Kodimension 1.

Ziel dieses Abschnitts ist es zu verstehen, wie man aus den Facetten eines Kegels alle seine Seiten erhält.

Lemma 2.7. *Es sei $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, sodass nicht alle v_i und v_j für $i \neq j$ linear abhängig seien. Weiter sei $u \in M_{\mathbb{R}}$, sodass $(u, v_i) > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$. Dann existiert ein $u' \in M_{\mathbb{R}}$ mit $(u', v_i) = 0$ für ein i , $(u', v_j) > 0$ für ein j und $(u', v_k) \geq 0$ für alle k .*

Beweis Wir können ohne Einschränkung alle v_i normieren. Dann entfernen wir alle überflüssigen Vektoren, d.h. solche, die zu einem anderen linear abhängig sind. Wir wählen $i \in \{1, \dots, s\}$ mit $(u, v_i) = \min\{(u, v_j) \mid j \in \{1, \dots, s\}\}$ und setzen $u' = u - (u, v_i)v_i$. Dann folgt

$$(u', v_i) = (u, v_i) - (u, v_i)(v_i, v_i) = (u, v_i) - (u, v_i) = 0,$$

wobei im vorletzten Schritt $\|v_i\| = 1$ verwendet wurde.

Für $j \neq i$ ist die Behauptung $(u', v_j) > 0$ gleichbedeutend zu $\frac{(u, v_j)}{(u, v_i)} > (v_i, v_j)$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von v_i und v_j folgt zunächst aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $(v_i, v_j) < \|v_i\| \cdot \|v_j\| = 1$ und weiter $1 \leq \frac{(u, v_j)}{(u, v_i)}$ wegen der Minimalität von (u, v_i) . \square

Lemma 2.8. *Es sei σ ein Kegel und $\tau < \sigma$ eine seiner echten Seiten. Weiter seien $\{v_1, \dots, v_l\}$ diejenigen Elemente aus einem Erzeugendensystem von σ , welche nicht in $U = \text{span}(\tau)$ liegen. Wir setzen $W = \text{span}(\sigma)$ und setzen weiter voraus, dass die Bilder \bar{v}_i in W/U paarweise linear abhängig seien. Dann ist τ eine Facette.*

Beweis Wegen der paarweisen linearen Abhängigkeit der \bar{v}_i , und weil sie ganz W/U erzeugen, ist die Dimension des Quotienten höchstens 1. Wegen $\tau \neq \sigma$ und Proposition 2.5 (vii) ist die Dimension mindestens 1, also gleich 1. Das heißt gerade, dass τ eine Facette ist. \square

Proposition 2.9. *Sei σ ein Kegel. Dann ist jede echte Seite von σ in einer Facette enthalten.*

Beweis Ist $\tau < \sigma$ eine echte Seite, dann ist nach 2.5 (vii) $\text{codim}(\tau < \sigma) \geq 1$. Ist die Kodimension gleich 1, so sind wir fertig. Sei also $\tau = \sigma \cap u^\perp$ eine Seite mit $\text{codim}(\tau < \sigma) \geq 2$. Wir müssen zeigen, dass τ in einer größeren echten Seite enthalten ist. Da es nur endlich viele Seiten gibt (Proposition 2.5 (iii)), können wir dann nämlich induktiv folgern, dass wir irgendwann in einer Facette landen.

Es sei $W = \text{span}(\sigma)$ und $U = \text{span}(\tau)$. Schränken wir u auf W ein, so ist $u \in U^\perp$ und induziert daher eine wohldefinierte lineare Abbildung \bar{u} auf W/U . Es seien $\{v_1, \dots, v_s\}$ die Erzeuger von σ . Ohne Einschränkung seien sie so angeordnet, dass $(u, v_1), \dots, (u, v_l) > 0$ und $(u, v_{l+1}), \dots, (u, v_s) = 0$. Es folgt $(\bar{u}, \bar{v}_i) > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$.

Aus Lemma 2.8 folgt, dass die \bar{v}_i nicht paarweise linear abhängig sind. Aus Lemma 2.7 erhalten wir dann die Existenz einer auf allen \bar{v}_i nichtnegativen Abbildung \bar{u}' mit $(\bar{u}', \bar{v}_i) = 0$ für ein i und $(\bar{u}', \bar{v}_j) > 0$ für ein $j \neq i$ ($i, j \in \{1, \dots, l\}$). u' hat dann auch auf W betrachtet diese Eigenschaften. Daraus folgt, dass $\sigma \cap u'^\perp \subseteq \sigma$ eine echte Seite ist (denn $(u', v_j) > 0$), die aber größer ist als τ (denn $v_i \in \sigma \cap u'^\perp \setminus \tau$). \square

Lemma 2.10. *Es seien $1 > \mu > \mu' > -1$ reelle Zahlen. Dann gilt die folgende Ungleichung:*

$$\mu \sqrt{1 - \mu'^2} > \mu' \sqrt{1 - \mu^2}. \quad (2.3)$$

Beweis Das ist eine einfache Übungsaufgabe, die sich beispielsweise per Fallunterscheidung lösen lässt, in der man danach unterscheidet, ob die auftretenden Zahlen positiv oder negativ sind. \square

Wir folgern aus dieser Ungleichung nun eine verschärfte, zweidimensionale Version von Lemma 2.7:

Lemma 2.11. *Es sei $\dim(N_{\mathbb{R}}) = 2$ und $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, sodass nicht alle v_i und v_j für $i \neq j$ linear abhängig seien. Weiter sei $u \in M_{\mathbb{R}}$, sodass $(u, v_i) > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$. Dann existieren (bis auf Permutation) genau zwei (zueinander linear unabhängige) normierte Vektoren $u', u'' \in M_{\mathbb{R}}$ mit (formuliert für u'): $(u', v_i) = 0$ für ein i , $(u', v_j) > 0$ für ein j und $(u', v_k) \geq 0$ für alle k .*

Beweis Wie in Lemma 2.7 können wir u als normiert und alle v_i als normiert und paarweise linear unabhängig annehmen. Es sei w ein normierter Vektor, der auf u senkrecht steht. Dann ist $\{u, w\}$ eine Orthonormalbasis von $N_{\mathbb{R}}$. Wir drücken alle v_i in dieser Basis aus und erhalten Koeffizienten $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ mit $v_i = \lambda_i u + \mu_i w$. Weiter ordnen wir die v_i ohne Einschränkung so an, dass $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s$. Wir stellen fest, dass $\lambda_i = (u, v_i) > 0$ ist. Wir behaupten, dass die Ungleichungskette echt ist. Tatsächlich: Ist $\mu_i = \mu_j$, so folgt wegen der Normiertheit von v_i

$$\lambda_i = \sqrt{1 - \mu_i^2} = \sqrt{1 - \mu_j^2} = \lambda_j,$$

also $v_i = v_j$ und damit $i = j$.

Wir definieren nun $u_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1} u - w$ und $u_s = \frac{\mu_s}{\lambda_s} u + w$ und behaupten, dass die Normierungen dieser beiden Vektoren unsere gesuchten Vektoren u', u'' sind. Da für die Existenzbehauptung die Länge der Vektoren irrelevant ist, verzichten wir auf die Normierung. Außerdem führen wir den Beweis nur für u_1 und überlassen die identischen Überlegungen für u_s dem Leser. Wir behaupten also genauer:

$$(u_1, v_1) = 0 \text{ und } (u_1, v_i) > 0 \text{ für alle } i \neq 1.$$

Wir erhalten $(u_1, v_1) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \lambda_1 - \mu_1 = 0$. Die Behauptung $(u_1, v_i) > 0$ lässt sich leicht äquivalent umformen zu $\mu_1 \lambda_i > \mu_i \lambda_1$. Wegen $0 \neq \lambda_i = \sqrt{1 - \mu_i^2}$ folgt dies aber aus Ungleichung (2.3).

Wir machen nun den Eindeutigkeitsbeweis. Offenbar sind die Normierungen von u_1 beziehungsweise u_s die eindeutigen normierten Vektoren mit der Eigenschaft, auf v_1 beziehungsweise v_s senkrecht und auf allen anderen Vektoren positiv zu stehen. Wir müssen also beweisen, dass es keinen Vektor u_i für $1 < i < s$ gibt mit der Eigenschaft $(u_i, v_i) = 0$ und $(u_i, v_j) > 0$ für alle $j \neq i$. Angenommen, so einen Vektor u_i gäbe es doch. Wir schreiben $u_i = au + bw$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Aus $(u_i, v_i) = 0$ folgt dann $a\lambda_i + b\mu_i = 0$, also $a = \frac{-\mu_i}{\lambda_i} b$. Wäre $b = 0$, so folgte auch $a = 0$ und damit $u_i = 0$, was nicht sein kann. Wir nehmen $b > 0$ an (den Fall $b < 0$ führt man analog zum Widerspruch). Wir behaupten, dass entgegen der Annahme $(u_i, v_s) < 0$ gelten muss. Wegen $b > 0$ formt man das aber leicht um zu $\mu_s \lambda_i < \mu_i \lambda_s$. Dies folgt wie oben aus (2.3). \square

Proposition 2.12. *Sei σ ein Kegel in $N_{\mathbb{R}}$.*

- (i) *Jede Seite τ mit $\text{codim}(\tau \leq \sigma) = 2$ ist der Durchschnitt von genau zwei Facetten von σ .*
- (ii) *Jede echte Seite von σ ist der Durchschnitt aller Facetten von σ , in denen sie enthalten ist.*

Beweis (i) Wir suchen echte Seiten von σ , in denen τ enthalten ist. Wir setzen dazu wieder $W = \text{span}(\sigma)$ und $\tau = \text{span}(\tau)$. Wegen $\text{codim}(\tau \leq \sigma) = 2$ ist $\dim(W/U) = 2$. Wie wir im Beweis von Proposition 2.9 gesehen haben, entsprechen die Facetten von σ , welche τ enthalten, den Linearformen \bar{u}' , die die Bedingungen aus Lemma 2.11. erfüllen. Dort haben wir auch gesehen, dass es davon im Wesentlichen genau zwei gibt, die dann auch tatsächlich (wie man dem Beweis von 2.9 entnimmt) unterschiedliche Facetten von σ definieren. Aus Proposition 2.5 (vii) folgt, dass deren Schnitt wirklich τ ist. \square

- (ii) Wir machen Induktion nach der Kodimension: Für $\text{codim}(\tau \leq \sigma) = 1$ ist nichts zu zeigen. Den Fall $\text{codim}(\tau \leq \sigma) = 2$ haben wir bereits in (i) behandelt. Wir gehen also davon aus, dass die Aussage bis einschließlich $\text{codim}(\tau \leq \sigma) = k - 1 \geq 2$ gezeigt ist und machen den Induktionsschluss:

τ habe Kodimension k in σ . Nach Proposition 2.9 finden wir eine Facette γ von σ , in der τ enthalten ist. τ und γ sind Kegel und τ eine Seite von γ (Proposition 2.5 (ii) und (vi)), und für die Kodimension von τ in γ errechnen wir:

$$\text{codim}(\tau \leq \gamma) = \text{codim}(\tau \leq \sigma) - \text{codim}(\gamma \leq \sigma) = k - 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist τ der Schnitt von Facetten in γ , und diese haben Kodimension 2 in σ (siehe Proposition 2.5 (v) um zu sehen, dass sie überhaupt Seiten von σ sind). Wieder nach Induktionsvoraussetzung lassen sich diese also als Schnitt von Facetten in σ schreiben, womit alles gezeigt ist. \square

2.4 Die Kegel- und Seitenstruktur von σ^\vee

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass σ^\vee selbst ein Kegel ist. Infolgedessen wird sich herausstellen, dass man Kegel definieren kann als Schnitte von Halbräumen. Schließlich werden wir eine Bijektion der Seiten von σ mit denen von σ^\vee konstruieren.

Zunächst müssen wir aber in der nächsten Proposition eine speziellere Theorie entwickeln, für den Fall, dass σ den gesamten Vektorraum $N_{\mathbb{R}}$ aufspannt. Man kann für jede dieser Aussagen Gegenbeispiele angeben, für den Fall, dass man diese Forderung nicht stellt.

Proposition 2.13. *Sei σ ein Kegel. In der gesamten Proposition gelte $\text{span}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$. Dann folgt:*

- (i) σ hat innere Punkte.
- (ii) $\partial\sigma$, der topologischen Rand von σ , ist genau die Vereinigung aller echten Seiten von σ (also nach 2.12 (ii) die Vereinigung aller Facetten).
- (iii) Ist τ eine Facette, so gibt es ein bis auf skalare Vielfache eindeutiges $u_\tau \in \sigma^\vee$ mit $\tau = \sigma \cap u_\tau$. Dieses u_τ hat als Nullstellenmenge genau die Hyperebene, die von τ aufgespannt wird.
- (iv) Es gelte $\sigma \neq N_{\mathbb{R}}$ und es seien $\tau_i = \sigma \cap u_{\tau_i}^\perp$ die Facetten von σ . Dann ist σ genau der Durchschnitt der Halbräume $H_{\tau_i} = \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid (u_{\tau_i}, v) \geq 0\}$.

Beweis

- (i) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Erzeuger von σ , $\{v_1, \dots, v_s\}$, ganz $N_{\mathbb{R}}$ erzeugen. Ohne Einschränkung seien diese Vektoren so angeordnet, dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ ($n \leq s$) eine Basis des n -dimensionalen Raums $N_{\mathbb{R}}$ ist. Wir betrachten dann die eindeutige lineare Abbildung $\varphi : N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $v_i \mapsto e_i$. Da φ als linearer Isomorphismus zwischen endlich-dimensionalen normierten Räumen auch ein Homöomorphismus ist, müssen wir also nur zeigen, dass $\varphi(\sigma) = \text{Cone}(e_1, \dots, e_n, \varphi(v_{n+1}), \dots, \varphi(v_s))$ innere Punkte enthält. Offenbar ist aber $U_1(\sum_i e_i) \subseteq \varphi(\sigma)$. \square
- (ii) Zuerst zeigen wir, dass jeder Punkt auf einer echten Seite zum topologischen Rand von σ gehört. Sei $\tau = \sigma \cap u^\perp < \sigma$ eine echte Seite und $v \in \tau$. Sei $\epsilon \geq 0$. Wir wollen einen Punkt $w \in U_\epsilon(v) \setminus \sigma$ finden:

τ ist eine echte Seite, also ist $u \neq 0$, d.h. es gibt $w' \in N_{\mathbb{R}}$ mit $(u, w') \neq 0$. Wenn wir w' gegebenenfalls durch $-w'$ ersetzen, so können wir sogar $(u, w') < 0$ annehmen. Ersetzen wir w' weiter durch $\frac{\epsilon}{2\|w'\|}w'$, so erreichen wir $\|w'\| = \frac{\epsilon}{2}$. Offenbar ist $w := v + w' \in U_\epsilon(v)$. Wir errechnen außerdem

$$(u, w) = (u, v) + (u, w') = 0 + (u, w') < 0,$$

denn es ist $v \in \tau \subseteq u^\perp$. Wegen $u \in \sigma^\vee$ ist dann aber $w \notin \sigma$, also die Behauptung.

Sei umgekehrt $v \in \partial\sigma$. Sei (w_i) eine Folge von Vektoren mit $w_i \rightarrow v$ und $w_i \notin \sigma$. Nach Lemma 2.1 existieren $u_i \in \sigma^\vee$ mit $(u_i, w_i) < 0$. Wir können ohne Einschränkung die Vektoren u_i als normiert annehmen. Beschränkte Folgen haben konvergente Teilfolgen, also können wir beim Übergang zu einer solchen Teilfolge annehmen, dass (u_i) gegen einen Grenzwert $u_0 \neq 0$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts ist dann auch $u_0 \in \sigma^\vee$. Wir möchten $v \in \sigma \cap u_0^\perp$ zeigen:

$v \in \sigma$ folgt aus der topologischen Abgeschlossenheit von σ . Mit $(u_i, w_i) < 0$ erhalten wir wieder mit der Stetigkeit des Skalarprodukts $(u_0, v) \leq 0$. Wegen $u_0 \in \sigma^\vee$ ist aber auch $(u_0, v) \geq 0$, also insgesamt $(u_0, v) = 0$. v liegt also in der Seite $\sigma \cap u_0^\perp$. Zu guter Letzt ist diese Seite echt, denn wäre $\sigma \subseteq u_0^\perp$, so folgte $N_{\mathbb{R}} = \text{span}(\sigma) = u_0^\perp$, im Widerspruch zu $u_0 \neq 0$. \square

- (iii) Sei $\tau = \sigma \cap u_1^\perp = \sigma \cap u_2^\perp$. Sei $W = \text{span}(\tau)$ die von τ aufgespannte Hyperebene. Nach Voraussetzung ist $\dim(W) = \dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1 = \dim(N_{\mathbb{R}}) - 1$. u_1 und u_2 stehen auf ganz τ senkrecht, also wegen ihrer Linearität auf ganz W , das heißt beide Vektoren sind Elemente von W^\perp . Bekanntlich ist unter den gegebenen Voraussetzungen $\dim(W^\perp) = 1$, also folgt tatsächlich $u_2 = \lambda u_1$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\tau \neq \sigma$ ist $u_1 \neq 0 \neq u_2$, d.h. die Nullstellenmenge beider Vektoren kann nicht größer als W sein. Also ist sie gleich W , was zu zeigen war. \square
- (iv) Man beachte zunächst, dass die Aussage insofern sinnvoll ist, als dass σ wirklich Facetten besitzt: Wegen $\sigma \neq N_{\mathbb{R}}$ gibt es ein $v \in N_{\mathbb{R}} \setminus \sigma$ und dazu nach Lemma 2.1 ein $u \in \sigma^\vee$ mit $(u, v) < 0$. Es muss also $u \neq 0$ gelten und u motiviert eine Seite $\sigma \cap u^\perp$. Wäre dieses gleich σ , so folgte

wegen $\text{span}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$ der Widerspruch $u^\perp = N_{\mathbb{R}}$ beziehungsweise $u = 0$. Also hat σ eine echte Seite und nach Proposition 2.9 auch eine Facette. Nun zum eigentlichen Beweis:

Dass σ im Schnitt der Halbräume liegt, ist klar. Wir nehmen an, dass es ein $v \in \bigcap H_{\tau_i} \setminus \sigma$ gibt, und wollen das zu einem Widerspruch führen:

Nach (i) hat σ einen inneren Punkt v' . Wir betrachten die Verbindungsstrecke von v' nach v :

$$L_{v',v} = \{\lambda v + (1 - \lambda)v' \mid \lambda \in [0, 1]\} = \text{Im}(\omega).$$

Dabei ist $\omega : [0, 1] \rightarrow V$ definiert durch $\omega(\lambda) = \lambda v + (1 - \lambda)v'$. Wir konstruieren einen Punkt $w \in L_{v',v} \cap \partial\sigma$: Sei dazu $\lambda_0 = \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \omega(\lambda) \in \sigma\}$. Dann folgt $\omega(\lambda_0) \in \sigma$, denn ω ist stetig und σ ist abgeschlossen. Wir definieren $w = \omega(\lambda_0)$. Lassen wir $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ von oben gegen λ_0 konvergieren, so ist $(\omega(\lambda_1), \omega(\lambda_2), \dots)$ eine Folge in $N_{\mathbb{R}} \setminus \sigma$, die gegen w konvergiert. Also ist $w \in L_{v',v} \cap \partial\sigma$ wie gewünscht.

Offenbar ist $\lambda_0 \in (0, 1)$ und folglich $\alpha := \frac{1}{\lambda_0} > 1$. Man rechnet leicht die Identität $v = \alpha w + (1 - \alpha)v'$ nach. Nach (ii) ist w als Randpunkt ein Element einer Facette $\tau = \sigma \cap u_\tau^\perp$. Wir studieren die Wirkung von u_τ auf v, v' und w , um einen Widerspruch zu erhalten:

Wegen $u_\tau \in \sigma^\vee$ ist $(u_\tau, v') \geq 0$. $(u_\tau, v') = 0$ kann nicht gelten, sonst wäre $v' \in \tau$ und damit nach (ii) ein Randpunkt. Also ist $(u_\tau, v') > 0$. $(u_\tau, w) = 0$ gilt nach Definition von u_τ . Zusammen damit, dass v nach Voraussetzung in H_τ liegt, erhalten wir:

$$0 \leq (u_\tau, v) = \alpha(u_\tau, w) + (1 - \alpha)(u_\tau, v') = (1 - \alpha)(u_\tau, v') < 0,$$

ein Widerspruch. □

Proposition 2.14. *Sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel. Dann folgt:*

- (i) *Auch die duale Menge σ^\vee ist ein Kegel.*
- (ii) *Für beliebige Erzeuger u_1, \dots, u_l von σ^\vee gilt: $\sigma = \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid (u_i, v) \geq 0 \text{ für alle } i\}$. Jede so entstehende Menge ist ein Kegel. Man kann Kegel also definieren als Schnitte von Halbräumen.*

Beweis

- (i) Wir betrachten zunächst den Fall $\text{span}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$. Dann folgt nach 2.13 (iv): $\sigma = \bigcap H_{\tau_i}$, wobei $\tau_i = \sigma \cap u_{\tau_i}$ die Facetten sind. Wir behaupten $\sigma^\vee = \text{Cone}(u_{\tau_i})$. Wegen $u_{\tau_i} \in \sigma^\vee$ ist eine Inklusion klar.

Wir nehmen umgekehrt an, es gäbe ein $u \in \sigma^\vee \setminus \text{Cone}(u_{\tau_i})$. Nach Lemma 2.1, angewendet auf den Kegel $\text{Cone}(u_{\tau_i})$, existiert ein $v \in (\text{Cone}(u_{\tau_i}))^\vee$ mit $(u, v) < 0$. Es ist $(u_{\tau_i}, v) \geq 0$ für alle i und somit $v \in \bigcap H_{\tau_i} = \sigma$. Wegen $u \in \sigma^\vee$ ist also $(u, v) \geq 0$, im Widerspruch dazu, dass wir bereits $(u, v) < 0$ festgestellt haben.

Nun sei $W = \text{span}(\sigma)$ beliebig. Es bezeichne σ_W die Menge σ , aufgefasst als Kegel in W . Nach obiger Argumentation ist $(\sigma_W)^\vee = \text{Cone}(u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_l})$, wobei τ_i die Facetten von σ_W sind. Es seien U_{τ_i} beliebige Fortsetzungen der $u_{\tau_i} \in W^*$ auf ganz $N_{\mathbb{R}}$. Weiter sei $\{U_1, \dots, U_l\}$ eine beliebige Basis von W^\perp . Wir beweisen nun die folgende Identität:

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(U_1, \dots, U_l, -U_1, \dots, -U_l, U_{\tau_1}, \dots, U_{\tau_l}).$$

Sei $U \in \sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$ und u die Einschränkung auf W . Wegen $\sigma \subseteq W$ können wir u auf ganz σ auswerten und erhalten $(u, v) \geq 0$ für alle $v \in \sigma = \sigma_W$, also $u \in (\sigma_W)^\vee = \text{Cone}(u_{\tau_i})$. Es gibt also Koeffizienten $a_i \geq 0$ und eine Beziehung

$$U|_W = u = a_1 u_{\tau_1} + \dots + a_l u_{\tau_l} = (a_1 U_{\tau_1} + \dots + a_l U_{\tau_l})|_W.$$

Es folgt $U - (a_1 U_{\tau_1} + \dots + a_t U_{\tau_t}) \in W^\perp = \text{Cone}(U_1, \dots, U_l, -U_1, \dots, -U_l)$ und damit die Behauptung.

Für die andere Inklusion müssen wir nur zeigen, dass jeder Erzeuger des rechten Kegels in σ^\vee liegt. Wegen $\sigma \subseteq W$ und $U_i, -U_i \in W^\perp$ ist automatisch $U_i, -U_i \in \sigma^\vee$ für alle i . Per Definition ist jedes u_{τ_i} Element von $(\sigma_W)^\vee$, also ist $U_{\tau_i} \in \sigma^\vee$ für alle i . \square

- (ii) Die Inklusion $\sigma \subseteq \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid (u_i, v) \geq 0 \text{ für alle } i\}$ gilt per Definition von σ^\vee . Sei umgekehrt v ein Element der rechten Seite. Da die u_i ganz σ^\vee erzeugen, folgt damit $v \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ (Proposition 2.3).

Sei nun $\{u_1, \dots, u_t\} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ irgendeine endliche Teilmenge (nicht assoziiert zu einem Kegel σ) und $A \subseteq N_{\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$A = \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid (u_i, v) \geq 0\}.$$

Dann folgt $A = \text{Cone}(u_1, \dots, u_t)^\vee$. Da die duale Menge eines Kegels nach (i) wieder ein Kegel ist, folgt die Behauptung \square .

Definition 2.15 (Relatives Inneres). Ist σ ein Kegel, so ist das *relative Innere*, geschrieben $\text{Relint}(\sigma)$, definiert als das Innere von σ bezüglich des topologischen Raums $\text{span}(\sigma)$. Offenbar gilt: $v \in \sigma$ ist genau dann Element von $\text{Relint}(\sigma)$, wenn eine kleine Umgebung $U_\epsilon(v)$ von v in $N_{\mathbb{R}}$ existiert mit $U_\epsilon(v) \cap \text{span}(\sigma) \subseteq \sigma$.

Proposition 2.13 (i) zeigt, dass das relative Innere nie leer ist. Der Beweis der nächsten Proposition verwendet Punkte im relativen Inneren.

Proposition 2.16 (Korrespondenz von Seiten in σ und σ^\vee). Sei τ eine Seite von σ . Wir definieren $\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp$. Dann folgt:

- (i) τ^* ist eine Seite von σ^\vee

- (ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Seiten von } \sigma\} &\rightarrow \{\text{Seiten von } \sigma^\vee\} \\ \tau &\mapsto \tau^* \end{aligned}$$

ist eine die Inklusion umkehrende Bijektion.

- (iii) Die kleinste Seite von σ ist $\sigma \cap (-\sigma)$.

- (iv) Sind $\tau \subseteq \tau'$ zwei Seiten von σ und ist τ eine Facette von τ' , dann ist τ^* eine Facette von τ'^*

- (v) Es gilt die Dimensionsformel $\dim(\tau) + \dim(\tau^*) = \dim(N_{\mathbb{R}})$.

Beweis

- (i) Sei τ eine Seite von σ . Wir wählen ein beliebiges v im relativen Inneren von τ und behaupten die Gleichheit $\tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp = \sigma^\vee \cap v^\perp$. Dann sind wir fertig, denn nach dem Dualitätstheorem 2.3 sind die Seiten von σ^\vee genau die Mengen der Form $\sigma^\vee \cap v^\perp$ mit einem $v \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.

Eine Inklusion ist klar. Sei also $u \in \sigma^\vee \cap v^\perp$. Wir machen die Widerspruchannahme $u \notin \tau^\perp$. Wegen $u \in \sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ gibt es dann ein $w \in \tau$ mit $(u, w) > 0$. Wir wählen ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(v) \cap \text{span}(\tau) \subseteq \tau$ und definieren einen Punkt $v' \in \tau \subseteq \sigma$ durch $v' = v + \alpha(v - w)$ mit einem beliebigen $\alpha \in (0, \frac{\epsilon}{\|v-w\|})$. Wir werten an u aus (beachte $u \in v^\perp$):

$$(u, v') = (u, v) + \alpha(u, v) - \alpha(u, w) = -\alpha(u, w) < 0.$$

Das ergibt den Widerspruch $u \notin \sigma^\vee$. Also ist doch $u \in \tau^\perp$ und damit $u \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ wie gewünscht.

\square

- (ii) Wir bezeichnen mit $(-)^{\bullet}$ die Abbildung in die andere Richtung, die also eine Seite τ von σ^{\vee} abbildet auf $\tau^{\bullet} = (\sigma^{\vee})^{\vee} \cap \tau^{\perp} = \sigma \cap \tau^{\perp}$. Auch diese bildet wohldefiniert auf Seiten von σ ab. Wir wollen zeigen, dass unsere beiden Abbildungen invers zueinander sind. Aufgrund der Symmetrie genügt es, für eine beliebige Seite $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ von σ die Gleichheit $\tau = (\tau^{\bullet})^{\bullet}$ nachzuweisen, also ausgeschrieben:

$$\sigma \cap u^{\perp} = \tau = \sigma \cap (\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp})^{\perp} = \sigma \cap (\sigma^{\vee} \cap (\sigma \cap u^{\perp})^{\perp})^{\perp}$$

Die eine Inklusion ist die Feststellung

$$\tau = \sigma \cap \tau \subseteq \sigma \cap (\tau^{\perp})^{\perp} \subseteq \sigma \cap (\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp})^{\perp}.$$

Sei v Element der rechten Seite. Wir müssen $v \in u^{\perp}$ zeigen. Wegen $v \in (\sigma^{\vee} \cap (\sigma \cap u^{\perp})^{\perp})^{\perp}$ genügt es dazu, $u \in \sigma^{\vee} \cap (\sigma \cap u^{\perp})^{\perp}$ nachzuweisen. $u \in \sigma^{\vee}$ ist sowieso gegeben, und wegen $u \in (u^{\perp})^{\perp} \subseteq (\sigma \cap u^{\perp})^{\perp}$ folgt die Behauptung. \square

- (iii) Folglich sind $(-)^{\bullet}$ und $(-)^{\vee}$ zueinander inverse Abbildungen. Da sie offensichtlich Inklusionsumkehrend sind, kommt die kleinste Seite von σ via $(-)^{\bullet}$ von der größten Seite von σ^{\vee} , also von σ^{\vee} selbst. Sie ist also gegeben durch $(\sigma^{\vee})^{\vee} \cap (\sigma^{\vee})^{\perp} = (\sigma^{\vee})^{\perp}$. Wir wollen die Gleichheit $(\sigma^{\vee})^{\perp} = \sigma \cap (-\sigma)$ verstehen. Sei $v \in (\sigma^{\vee})^{\perp}$. Offenbar ist dann $v \in (\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$. Da außerdem auch $-v \in (\sigma^{\vee})^{\perp}$ ist, sehen wir $-v \in \sigma$ bzw. $v \in (-\sigma)$, also insgesamt $v \in \sigma \cap (-\sigma)$. Ist umgekehrt $v \in \sigma \cap (-\sigma)$ und $u \in \sigma^{\vee}$, so folgt $(u, v) \geq 0$ wegen $v \in \sigma$ und $(u, -v) \geq 0$ wegen $-v \in \sigma$, also $(u, v) = 0$ und somit $v \in (\sigma^{\vee})^{\perp}$. \square

- (iv) Wäre der Dimensionsunterschied der dualen Seiten größer als eins, so gäbe es eine Facette $\gamma^* \subset \tau^*$ mit $\tau'^* \subset \gamma^*$, denn nach Proposition 2.9 ist jede Seite eines Kegels in einer Facette enthalten, und eine solche Facette kommt nach obiger Bijektion zwangsläufig von einer Seite $\gamma \subseteq \sigma$. Dann folgt aber $\tau \subset \gamma \subset \tau'$, und keine der Inklusionen ist eine Gleichheit. Entweder links oder rechts müssen aber die Dimensionen gleich sein. Das widerspricht dann Proposition 2.5 (vii).

Wäre der der Dimensionsunterschied von τ^* und τ'^* hingegen Null, so wären beide wieder nach Proposition 2.5 (vii) schon gleich. Das ist aber nicht möglich, da $(-)^{\bullet}$ wie bereits festgestellt injektiv ist. \square

- (v) Wir zeigen die Dimensionsformel zunächst für die spezielle Seite $\sigma \cap (-\sigma) = (\sigma^{\vee})^{\perp}$, das heißt es soll $\dim((\sigma^{\vee})^{\perp}) + \dim(\sigma^{\vee}) = n$ gelten. Das ist aber ein Standardresultat über orthogonale Komplemente.

Nun zur allgemeinen Dimensionsformel. Sei $\tau \neq \sigma \cap (-\sigma)$ eine beliebige Seite von σ . Wir bilden eine Kette

$$\sigma \cap (-\sigma) = \tau_k \subset \tau_{k-1} \subset \cdots \subset \tau_0 = \tau,$$

wie folgt: $\sigma \cap (-\sigma)$ ist eine echte Seite des Kegels $\tau = \tau_0$ und als solches nach Proposition 2.9 in einer seiner Facetten τ_1 enthalten. $\sigma \cap (-\sigma)$ ist also eine Seite des Kegels τ_1 und wir erhalten wie oben eine Facette τ_2 und so weiter bis der Prozess bei $\sigma \cap (-\sigma)$ abbricht. Die so entstehende Kette erfüllt nach Konstruktion $\dim(\tau_i) = \dim(\tau_{i+1}) + 1$ und es folgt $\dim(\tau) = \dim(\sigma \cap (-\sigma)) + k$.

Zu dieser Kette erhalten wir die duale Kette

$$\tau^* = \tau_0^* \subset \tau_1^* \subset \cdots \subset \tau_k^* = (\sigma \cap (-\sigma))^* = \sigma^{\vee}.$$

Da auch hier nach (iv) der Dimensionsunterschied benachbarter Glieder eins beträgt, folgt $\dim(\tau^*) = \dim(\sigma^{\vee}) - k$ und man erhält die allgemeine Dimensionsformel aus der bereits gezeigten speziellen Formel. \square

2.5 Rationale Kegel

Wir erinnern daran, dass rationale Kegel solche sind, deren Erzeuger in N gewählt werden können, siehe Definition 1.2. Die Ergebnisse dieser Sektion bilden die Essenz der torischen Geometrie: Viele der hier gegebenen Aussagen werden sich später in geometrische Aussagen über torische Varietäten übersetzen.

Lemma 2.17. *Ist σ rational, dann auch der duale Kegel σ^\vee .*

Beweis Ohne Einschränkung ist $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\sigma^\vee \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Darstellung

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(U_1, \dots, U_l, -U_1, \dots, -U_l, U_{\tau_1}, \dots, U_{\tau_l})$$

aus Proposition 2.14 (i) und behaupten, dass wir die darin auftretenden Erzeuger aus \mathbb{Z}^n wählen konnten. Der Unterraum $W = \text{span}(\sigma)$ von V hat eine Basis $\{v_1, \dots, v_{n-l}\}$ von Elementen aus \mathbb{Z}^n , denn wir können als Basis eine Teilmenge der Erzeugendenmenge von σ wählen. Dann folgt

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid (u, v_i) = 0, i \in \{1, \dots, n-l\}\}.$$

Genauso sind auch die U_{τ_i} als Elemente von τ_i^\perp Lösungen eines Gleichungssystems mit ganzzahligen Einträgen. Da der Gaußalgorithmus in den rationalen Zahlen bleibt, können wir also durch geeignetes Skalieren all dieser Vektoren erreichen, dass sie in \mathbb{Z}^n liegen, siehe auch Lemma 4.4. \square

Lemma 2.18. *Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann ist $K \cap \mathbb{Z}^n$ endlich.*

Beweis K ist als beschränkte Menge in einem großen Würfel mit Ursprung als Mittelpunkt enthalten. Vergrößern wir ihn weiter, können wir annehmen, dass er geradzahlig Kantenlänge hat, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subseteq \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid |a_i| \leq m\}.$$

Dann ist $\#(K \cap \mathbb{Z}^n) \leq \#\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid |a_i| \leq m\} = (2m+1)^n$. \square

Wir werden nun das zentrale Lemma von Gordan beweisen. Es wird später gebraucht, um zu zeigen, dass die torischen Varietäten, die wir zu Kegeln assoziieren werden, von endlichem Typ über dem Grundkörper sind. Wir erinnern daran, dass Monoide Mengen zusammen mit einer Verknüpfung sind, die alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe erfüllt außer die Existenz von Inversen Elementen, siehe Definition 1.7.

Proposition 2.19 (Gordan's Lemma). *Sei σ ein rationaler Kegel. Dann ist $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ ein endlich erzeugtes Monoid.*

Beweis Nach Lemma 2.17 ist auch σ^\vee rational, es gibt also $u_1, \dots, u_s \in \sigma^\vee \cap M$, die den Kegel σ^\vee erzeugen. Wir definieren $K = \{\sum t_i u_i \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$. K ist offenbar beschränkt. Wir sehen mit Lemma 2.18 die Endlichkeit der Menge $K \cap M \subseteq \sigma^\vee \cap M$. Wir behaupten, dass $K \cap M$ das Monoid $\sigma^\vee \cap M$ erzeugt:

Sei also $u = \sum r_i u_i \in \sigma^\vee \cap M$, $r_i \geq 0$. Sei m_i jeweils die größte nichtnegative ganze Zahl mit $m_i \leq r_i$. Dann gibt es $t_i \in [0, 1]$ mit $r_i = m_i + t_i$. Wir setzen nun $u' = \sum t_i u_i = u - \sum m_i u_i$. Wegen $u_i \in K \cap M$ und $u \in M$ ist auch $u' \in M$. Außerdem ist $u' \in K$ und damit $u' \in K \cap M$. Also ist $u = u' + \sum m_i u_i$ ein Element im Erzeugnis von $K \cap M$. \square

Lemma 2.20. *Sei σ ein beliebiger Kegel. Ist $\tau = \sigma \cap u^\perp$ eine Seite, dann ist $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u)$.*

Beweis Offenbar sind beide Seiten der zu zeigenden Gleichung Kegel. Wegen des Dualitätstheorems 2.3 genügt es zu zeigen, dass die jeweiligen dualen Mengen übereinstimmen. Die duale Menge der linken Seite ist $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Wir möchten also die Gleichheit $\sigma \cap u^\perp = (\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u))^\vee$ zeigen:

Sei dazu $v \in \sigma \cap u^\perp$ und $w + t \cdot (-u) \in \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u)$ beliebig. Es folgt

$$(w + t \cdot (-u), v) = (w, v) - t(u, v) = (w, v) \geq 0.$$

Also ist $v \in (\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u))^\vee$.

Sei umgekehrt $v \in (\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u))^\vee$. Es ist insbesondere $v \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. Wegen $u \in \sigma^\vee$ folgt daraus weiter $(u, v) \geq 0$ und wegen $-u = 0 + 1(-u) \in \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u)$ auch $(-u, v) \geq 0$, also schließlich $(u, v) = 0$. Wir haben also wie gewünscht $v \in \sigma \cap u^\perp$ gezeigt. \square

Lemma 2.21. *Sei σ ein rationaler Kegel. Dann ist $\text{Relint}(\sigma) \cap N \neq \emptyset$.*

Beweis Sei $\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_s)$ mit $v_i \in N$, wobei die v_i so angeordnet seien, $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von $\text{span}(\sigma)$ ist ($k \leq s$). Dann ist $v = \sum_{i=1}^k v_i \in M$ und aus dem Beweis von Proposition 2.13 (i) folgt $v \in \text{Relint}(\sigma)$. \square

Proposition 2.22. *Sei σ ein rationaler Kegel und $u \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Dann ist $\tau = \sigma \cap u^\perp$ ein rationaler Kegel. Alle Seiten von σ entstehen so und es gilt folgende Beziehung für die assoziierten Monoide:*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$$

Beweis $\tau = \sigma \cap u^\perp$ ist per Definition eine Seite des rationalen Kegels σ und als solches nach der Aussage und dem Beweis von Proposition 2.5 (ii) ein rationaler Kegel.

Ist umgekehrt τ irgendeine Seite von σ , so folgt

$$\tau = (\tau^*)^\bullet = \sigma \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\perp,$$

mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Proposition 2.16 (ii). Nach Lemma 2.17 ist σ^\vee ein rationaler Kegel. $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ ist eine seiner Seiten und als solches, wie wir eben gesehen haben, auch rational. Nach Lemma 2.21 existiert also ein $u \in M$ im relativen Inneren von $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ und wir sehen aus der Argumentation von Proposition 2.16 (i) die Gleichheit $\tau = \sigma \cap u^\perp$, wie gewünscht.

Nun zur behaupteten Beziehung der Monoide. Sei $w \in S_\tau$. Dann ist $w \in \tau^\vee$, es gibt also nach Lemma 2.20 ein $u' \in \sigma^\vee$ und ein $\lambda \geq 0$ mit $w = u' - \lambda u$. Für großes positives $p \in \mathbb{N}$ folgt dann $w + pu = u' + (p - \lambda)u \in \sigma^\vee$. Folglich ist $w = (w + pu) - pu \in S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$.

Zur anderen Inklusion: Wegen $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ ist auch $S_\sigma \subseteq S_\tau$. Außerdem ist $u \in \tau^\perp \cap M$, also sieht man sofort $-u \in S_\tau$. Da S_τ additiv abgeschlossen ist, folgt die Inklusion $S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u) \subseteq S_\tau$. \square

Proposition 2.23 (Trennende Hyperebene). *Es seien σ und σ' zwei Kegel, sodass der Schnitt $\tau = \sigma \cap \sigma'$ eine Seite von beiden ist. Dann gelten:*

(i) *Es existiert ein $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ mit*

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp.$$

(ii) *Sind zusätzlich σ und σ' rational, so gilt:*

$$S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$$

Beweis

- (i) Wir definieren $\gamma = \sigma - \sigma'$ und stellen fest, dass dies wieder ein Kegel ist. Die kleinste Seite ist $\gamma \cap (-\gamma)$ (Proposition 2.16 (iii)) und lässt sich nach dem Beweis von Teil (i) der gleichen Proposition beschreiben als $\gamma \cap (-\gamma) = \gamma \cap u^\perp$ für ein beliebiges $u \in \text{Relint}(\gamma^\vee)$. Wir behaupten, dass dieses u bereits alles erfüllt:

Wegen $0 \in \sigma'$ ist $\sigma \subseteq \gamma$, also $\gamma^\vee \subseteq \sigma'^\vee$ und damit $u \in \sigma'^\vee$. Analog gilt auch $u \in (-\sigma')^\vee$. Wir wollen die Gleichheit $\tau = \sigma \cap \sigma'$ verstehen:

Für eine Inklusion beobachten wir

$$\tau = \sigma \cap \sigma' \subseteq (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma) = \gamma \cap (-\gamma) = \gamma \cap u^\perp,$$

das heißt es ist $\tau \subseteq u^\perp$. Da wir sowieso $\tau \subseteq \sigma$ haben, folgt $\tau \subseteq \sigma \cap u^\perp$.

Ist umgekehrt $v \in \sigma \cap u^\perp$, dann ist auch $v \in \gamma \cap u^\perp$, also insbesondere $v \in \sigma' - \sigma$, das heißt es existieren $w' \in \sigma'$ und $w \in \sigma$ mit $w' = v + w$. Folglich ist $w' \in \sigma \cap \sigma' = \tau$. Nach Proposition 2.5 (viii) ist dann aber bereits $v \in \tau$.

Wir wollen noch $\tau = \sigma' \cap u^\perp$ verstehen. Die Inklusion von links nach rechts sehen wir genauso wie oben. Für die andere Inklusion bemerken wir, dass aus $u \in \text{Relint}(\gamma^\vee)$ folgt:

$$-u \in \text{Relint}(-\gamma^\vee) = \text{Relint}((-\gamma)^\vee).$$

Das impliziert

$$\gamma \cap (-\gamma) = (-\gamma) \cap (-(-\gamma)) = (-\gamma) \cap (-u)^\perp.$$

Ist dann $v \in \sigma' \cap u^\perp \subseteq (\sigma' - \sigma) \cap u^\perp = (-\gamma) \cap (-u)^\perp$, so folgt demnach $v \in \sigma - \sigma'$ und wir können fortfahren wie oben. \square

- (ii) Wegen $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ und $\sigma'^\vee \subseteq \tau^\vee$ ist eine Inklusion klar. Für die andere Inklusion wählen wir u so wie in (i). Da alle auftretenden Kegel nun rational sind, können wir sogar $u \in M$ annehmen (Lemma 2.21). Da außerdem, wie bereits gesehen, auch $u \in (-\sigma')^\vee$ ist, sehen wir $-u \in \sigma'^\vee$, also insgesamt $-u \in S_{\sigma'}$. Mit Proposition 2.22 folgt $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u) \subseteq S_\sigma + S_{\sigma'}$. \square

2.6 Strikte Konvexität

Wir studieren hier noch ein wenig strikte Konvexität. Ein Kegel ist anschaulich strikt konvex, wenn er im Ursprung eine „Spitze“ hat, siehe auch Definition 1.2. Die strikte Konvexität wird später sicherstellen, dass unsere zu Kegeln und Fächern assoziierten torischen Varietäten „den richtigen“ algebraischen Torus enthalten.

Proposition 2.24. *Sei σ ein Kegel. Dann sind äquivalent:*

- (i) σ ist strikt konvex
- (ii) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$
- (iii) Es gibt ein $u \in \sigma^\vee$ mit $\sigma \cap u^\perp = \{0\}$
- (iv) $\text{span}(\sigma^\vee) = M_{\mathbb{R}}$

Beweis Da $\sigma \cap (-\sigma)$ der größte Unterraum von $N_{\mathbb{R}}$ ist, der in σ enthalten ist, ist die Äquivalenz von (i) und (ii) unmittelbar klar. (ii) und (iii) sind äquivalent, da $\sigma \cap (-\sigma)$ die kleinste Seite von σ ist (Proposition 2.16 (iii)). Die Äquivalenz von (ii) und (iv) folgt aus der Dimensionsformel $\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + \dim(\sigma^\vee) = n$ (2.16 (v)). \square

Kapitel 3

Der Funktor (FAN) \rightarrow (TOV-NS)

Wir haben nun genügend Theorie aufgebaut, um die torische Geometrie entwickeln zu können. Dazu werden wir in diesem Abschnitt Varietäten zu strikt konvexen rationalen Kegeln assoziieren. Im nächsten Abschnitt verkleben wir mehrere solcher Varietäten und assoziieren so allgemeiner zu Fächern Varietäten. Danach werden wir zeigen, dass jede so gewonnene Varietät torisch ist und einsehen, dass diese Zuordnung funktoriell ist. Schließlich wird sich herausstellen, dass wir bei dieser Konstruktion innerhalb der normalen und separierten torischen Varietäten landen. Für die benötigten Grundlagen aus der Schematheorie verweisen wir auf Anhang A.1, auf dessen Ergebnisse wir gelegentlich zurückgreifen. Hauptquelle dieses Kapitels ist [Ful, Chap. 1.3–1.4] sowie für Abschnitt 3.5 [Sch, Chap. 1.3].

3.1 Die affine torische Varietät eines Kegels

Von nun an sei jeder Kegel als strikt konvex und rational vorausgesetzt. Wir sagen deshalb kurz Kegel für jeden strikt konvexen, rationalen Kegel. Vor allem die Forderung der strikten Konvexität ist nicht für jede Proposition nötig, es erleichtert aber bei weitem den Sprachgebrauch. Wir brauchen eine weitere Definition:

Definition 3.1 (Affines Monoid). Ein *affines Monoid* ist ein endlich erzeugtes Monoid S zusammen mit einem injektiven Monoidmorphismus $S \rightarrow M$ für ein Gitter M .

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir fixieren uns wieder ein Gitter N mit dualem Gitter $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Gordan's Lemma (Proposition 2.19) zeigt, dass S_{σ} für jeden Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein affines Monoid ist (Man wählt als Einbettung einfach die Inklusion). Wir setzen $U_{\sigma} = \text{Spec}(k[S_{\sigma}])$ und nennen dies schon jetzt die zu σ korrespondierende torische Varietät (später werden wir zeigen, dass U_{σ} wirklich torisch ist). Zunächst zeigen wir:

Proposition 3.2. Sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel und $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M \subseteq M$ das assoziierte affine Monoid. Dann ist $k[S_{\sigma}]$ eine endlich erzeugte, integrale k -Algebra. Folglich ist U_{σ} ein integrales Schema von endlichem Typ über k .

Beweis Da S_{σ} nach Gordans Lemma endlich erzeugt ist, ist es auch die k -Algebra $k[S_{\sigma}]$. Wegen $S_{\sigma} \subseteq M$ gibt es eine Einbettung $k[S_{\sigma}] \subseteq k[M]$, sodass wir nur zeigen müssen, dass $k[M]$ integer ist. Nach Beispiel 1.11 ist $k[M]$ isomorph zum Ring der Laurentpolynome $k[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$, der als Teilring des rationalen Funktionenkörpers $k(X_1, \dots, X_n)$ ein Integritätsring ist. \square

Die vorangehende Proposition zeigt, dass wir $k[S_{\sigma}]$ nach Wahl einer Basis von M als Ring von Polynomen in den Variablen $X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}$ schreiben können.

Beispiel 3.3. Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von N und $\sigma = \text{Cone}(b_1, \dots, b_k)$, $1 \leq k \leq n$. Dann folgt

$$S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot b_1^* + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot b_k^* + \mathbb{Z} \cdot b_{k+1}^* + \dots + \mathbb{Z} \cdot b_n^*$$

sowie

$$k[S_\sigma] = k[X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, X_{k+1}^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}],$$

wobei die $b_i^* \in M$ wie immer die zu $\{b_1, \dots, b_n\}$ duale Basis bilden, das heißt es gilt $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$.

Beweis Sei $u \in M$. Wir schreiben $u = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Dann ist $u \in S_\sigma$ genau dann, wenn $(u, b_i) \geq 0$, also $a_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Das ist genau dann der Fall, wenn $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot b_1^* + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot b_k^* + \mathbb{Z} \cdot b_{k+1}^* + \dots + \mathbb{Z} \cdot b_n^*$.

Folglich wird S_σ als Monoid erzeugt von $\{b_1^*, \dots, b_k^*, b_{k+1}^*, -b_{k+1}^*, \dots, b_n^*, -b_n^*\}$, was nach der Identifikation $X_i = \chi^{b_i^*}$ auch die Aussage über $k[S_\sigma]$ beweist. \square

In der nächsten Proposition wollen wir ein Mittel bereitstellen, den Koordinatenring einer zu σ gehörigen torischen Varietät U_σ explizit auszurechnen, das heißt als Quotient eines Polynomrings $k[Y_1, \dots, Y_t]$ und eines Primideals zu schreiben. Das Beispiel danach wird jedoch zeigen, dass es im Einzelfall immer noch Arbeit sein kann, ein möglichst kleines Erzeugendensystem des Primideals zu finden.

Proposition 3.4. Wird S_σ erzeugt von $\{u_1, \dots, u_t\}$, so folgt

$$k[S_\sigma] \cong k[Y_1, \dots, Y_t]/I,$$

mit

$$I = \left\langle Y_1^{a_1} Y_2^{a_2} \dots Y_t^{a_t} - Y_1^{b_1} Y_2^{b_2} \dots Y_t^{b_t} \mid a_1 u_1 + \dots + a_t u_t = b_1 u_1 + \dots + b_t u_t \right\rangle.$$

Beweis Wir betrachten den k -Algebrenhomomorphismus $\varphi : k[Y_1, \dots, Y_t] \rightarrow k[S_\sigma]$ mit $Y_i \mapsto \chi^{u_i}$. Dann besteht der Isomorphismus $k[S_\sigma] \cong k[Y_1, \dots, Y_t]/\ker(\varphi)$ und wir müssen lediglich die Gleichheit $I = \ker(\varphi)$ zeigen.

Sei für die eine Inklusion $a, b \in \mathbb{N}^t$ mit $a_1 u_1 + \dots + a_t u_t = b_1 u_1 + \dots + b_t u_t =: u$. Dann folgt in der Tat

$$\varphi(Y_1^{a_1} \dots Y_t^{a_t} - Y_1^{b_1} \dots Y_t^{b_t}) = \varphi(Y_1)^{a_1} \dots \varphi(Y_t)^{a_t} - \varphi(Y_1)^{b_1} \dots \varphi(Y_t)^{b_t} = \chi^u - \chi^u = 0,$$

also $Y_1^{a_1} \dots Y_t^{a_t} - Y_1^{b_1} \dots Y_t^{b_t} \in \ker(\varphi)$. Für die andere Inklusion sei $f = \sum_{a \in \mathbb{N}^t} b_a Y^a \in \ker(\varphi)$ beliebig. Dann folgt

$$0 = \varphi(f) = \sum_{a \in \mathbb{N}^t} b_a \chi^{a_1 u_1 + \dots + a_t u_t} = \sum_{u \in S_\sigma} \left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^t \\ a_1 u_1 + \dots + a_t u_t = u}} b_a \right) \chi^u,$$

und folglich, da S_σ eine Basis des k -Vektorraums $k[S_\sigma]$ bildet: Für alle $u \in S_\sigma$ ist $\sum_{a_1 u_1 + \dots + a_t u_t = u} b_a = 0$. Wir sind also fertig, wenn wir folgende Behauptung zeigen können:

Sei $f = \sum_{a \in \mathbb{N}^t} b_a Y^a \in k[Y_1, \dots, Y_t]$ mit $a_1 u_1 + \dots + a_t u_t = a'_1 u_1 + \dots + a'_t u_t$ für alle $a, a' \in \mathbb{N}^t$ mit $b_a, b_{a'} \neq 0$. Ist $\sum_{a \in \mathbb{N}^t} b_a = 0$, dann ist $f \in I$:

Wir können davon ausgehen, dass $B_f = \{a \in \mathbb{N}^t \mid b_a \neq 0\}$ nicht leer ist. Wegen $\sum b_a = 0$ besteht B dann aus mindestens zwei Elementen. Seien $a, a' \in B$ paarweise verschieden. Wir haben

$$f = \left[f - (b_a Y^a - b_{a'} Y^{a'}) \right] + b_a (Y^a - Y^{a'}).$$

Da der rechte Summand in I liegt, müssen wir nur noch $g := \left[f - (b_a Y^a - b_{a'} Y^{a'}) \right] \in I$ zeigen. Da g offenbar die gleichen Voraussetzungen erfüllt wie f , können wir induktiv vorgehen: Die Menge B_g hat eine echt kleinere Kardinalität als B_f , also sind wir nach endlich vielen Schritten fertig. \square

Beispiel 3.5. Sei $N = \mathbb{Z}^3$ und $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_3 - e_2)$. Dann wird S_σ als Monoid erzeugt von $e_1^*, e_3^*, e_1^* + e_2^*$ und $e_2^* + e_3^*$ und man erhält

$$k[S_\sigma] = k[X_1, X_3, X_1X_2, X_2X_3] \cong k[W, X, Y, Z]/(WZ - XY)$$

Beweis Dass die angegebenen Vektoren in S_σ liegen ist klar. Sei umgekehrt $u = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* \in S_\sigma$, wobei $a_i \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $a_i \geq 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $a_1 + a_3 - a_2 \geq 0$. Ohne Einschränkung können wir $a_1 + a_3 > 0$ annehmen, andernfalls ist nämlich sofort $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ und daher nichts zu zeigen. Es lässt sich dann zeigen, dass

$$u = \left(a_1 - \left\lfloor \frac{a_1a_2}{a_1 + a_3} \right\rfloor \right) e_1^* + \left(a_3 - \left\lfloor \frac{a_2a_3}{a_1 + a_3} \right\rfloor \right) e_3^* + \left\lfloor \frac{a_1a_2}{a_1 + a_3} \right\rfloor (e_1^* + e_2^*) + \left\lfloor \frac{a_2a_3}{a_1 + a_3} \right\rfloor (e_2^* + e_3^*)$$

eine Darstellung der gewünschten Form ist. Dabei ist $\lceil \cdot \rceil$ die Aufrundungsfunktion und $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion. Also wird S_σ von $\{e_1^*, e_3^*, e_1^* + e_2^*, e_2^* + e_3^*\}$ erzeugt.

Nach Proposition 3.4 ist $k[S_\sigma] \cong k[W, X, Y, Z]/I$ mit einem Ideal, das von den dort angegebenen Relationen erzeugt wird. Offensichtlich ist $WZ - XY \in I$. Umgekehrt genügt es, das Folgende zu zeigen: Ist $f = W^{a_1}X^{a_2}Y^{a_3}Z^{a_4} - W^{b_1}X^{b_2}Y^{b_3}Z^{b_4} \in k[W, X, Y, Z]$ ein Binom mit

$$a_1e_1^* + a_2e_3^* + a_3(e_1^* + e_2^*) + a_4(e_2^* + e_3^*) = b_1e_1^* + b_2e_3^* + b_3(e_1^* + e_2^*) + b_4(e_2^* + e_3^*),$$

dann ist $f \in (WZ - XY)$: Die Annahme ist äquivalent zu

(i) $a_1 + a_3 = b_1 + b_3,$

(ii) $a_3 + a_4 = b_3 + b_4,$

(iii) $a_2 + a_4 = b_2 + b_4.$

Schreiben wir

$$f = X^{c_1}Y^{c_2}Z^{c_3}W^{c_4} (W^{a'_1}X^{a'_2}Y^{a'_3}Z^{a'_4} - W^{b'_1}X^{b'_2}Y^{b'_3}Z^{b'_4})$$

mit $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ und $a'_i = a_i - c_i, b'_i = b_i - c_i$, so sehen wir, dass wir ohne Einschränkung $\min\{a_i, b_i\} = 0$ annehmen können (an den Bedingungen (i), (ii) und (iii) ändert sich nichts, wenn wir a_i durch a'_i und b_i durch b'_i ersetzen). Falls $a_1 = b_1 = 0$, so folgt aus (i) sofort $a_3 = b_3$ und dann aus (ii) $a_4 = b_4$ und schließlich aus (iii) $a_2 = b_2$, also $f = 0 \in (WZ - XY)$. Es ist also ohne Einschränkung $a_1 \neq 0$ oder $b_1 \neq 0$. Multiplizieren wir gegebenenfalls mit -1 , so können wir nach einer Bezeichnungsvertauschung sogar $a_1 > 0$ und demnach $b_1 = 0$ annehmen. Dann ist nach (i) $b_3 = a_1 + a_3 > 0$, wegen $\min\{a_3, b_3\} = 0$ also $a_3 = 0$ und daher $b_3 = a_1 > 0$. Weiter folgt aus (ii) $a_4 = b_3 + b_4 > 0$, also $b_4 = 0$ und daher $a_4 = b_3 = a_1 > 0$. Schließlich sehen wir mit (iii) $b_2 = a_2 + a_4 > 0$, also $a_2 = 0$ und deshalb $b_2 = a_4 = b_3 = a_1 =: a$. Also ist

$$f = (WZ)^a - (XY)^a = \left(\sum_{i=0}^{a-1} (XY)^i (WZ)^{a-1-i} \right) \cdot (WZ - XY) \in (WZ - XY),$$

also das, was zu zeigen war. □

In der folgenden Proposition erfahren wir, wie Seiten von Kegeln und die zugehörigen torischen Varietäten zusammenhängen. Das wird der Schlüssel sein, der es uns ermöglicht, affine torische Varietäten zu allgemeineren torischen Varietäten zu verkleben. Wir verwenden im Weiteren die Bezeichnung $T = \text{Spec}(k[M])$ für den algebraischen Torus, der zum Gitter M gehört (siehe Definition 1.14) und stellen für später fest: $T = \text{Spec}(k[M]) = \text{Spec}(k[\{0\}^\vee \cap M]) = U_{\{0\}}$. Das heißt: Unser Torus ist die affine torische Varietät des trivialen Kegels $\{0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$.

Proposition 3.6. *Seien $\tau \leq \sigma$ Kegel. Dies induziert die natürliche Inklusion von Monoiden $S_\sigma \rightarrow S_\tau$ und folglich einen k -Algebrenhomomorphismus $k[S_\sigma] \rightarrow k[S_\tau]$. Dieser induziert einen Morphismus $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ von Schemata über k . Wir behaupten: Dies ist eine offene Immersion. Insbesondere gibt es eine offene Immersion $T \rightarrow U_\sigma$.*

Beweis Zu $\tau \leq \sigma$ gibt es nach Proposition 2.22 ein $u \in S_\sigma$ mit $\tau = \sigma \cap u^\perp$ und $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$.

Die Einbettung $k[S_\sigma] \rightarrow k[S_\tau]$ bildet χ^u auf eine Einheit ab (denn $\chi^{-u} \in k[S_\tau]$), und induziert daher eine Einbettung $k[S_\sigma]_{\chi^u} \rightarrow k[S_\tau]$. Wir zeigen, dass diese sogar ein Isomorphismus, also surjektiv ist. Dazu genügt es, die Basiselemente des k -Vektorraums $k[S_\tau]$ zu treffen, also Elemente χ^v mit $v \in S_\tau$. Es ist $v = w - pu$ für ein $w \in S_\sigma$ und ein $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, das heißt χ^v wird getroffen von $\frac{\chi^w}{(\chi^u)^p} \in k[S_\sigma]_{\chi^u}$. Wir haben also folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} k[S_\sigma] & \xrightarrow{\quad} & k[S_\tau] \\ & \searrow & \nearrow \sim \\ & k[S_\sigma]_{\chi^u} & \end{array}$$

Folglich faktorisiert die Abbildung $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ über die offene Immersion $\text{Spec}(k[S_\sigma]_{\chi^u}) \rightarrow U_\sigma$ und induziert demnach einen Isomorphismus auf das offene Unterschema $D(\chi^u) \subseteq U_\sigma$. Eine Referenz für die letzte Behauptung ist [Wed, Example 2.38]. Wegen $T = U_{\{0\}}$, und weil $\{0\}$ wegen der strikten Konvexität eine Seite von σ ist, findet man also auch eine natürliche offene Immersion $T \rightarrow U_\sigma$. \square

3.2 Die torische Varietät eines Fächers

Wir erinnern daran, dass ein Fächer eine endliche Menge von (wie immer strikt konvexen, rationalen) Kegeln ist, derart, dass sie gegenüber Seitenbildung abgeschlossen ist und dass zwei enthaltene Kegel sich wieder in gemeinsamen Seiten schneiden (siehe Definition 1.5). Besteht ein Fächer aus Kegeln $\sigma_0, \dots, \sigma_n$, so stimmt die Menge $\Sigma(\sigma_0, \dots, \sigma_n) := \{\tau \mid \tau \leq \sigma_i \text{ für ein } i\}$ offenbar mit Σ überein. Die folgende Proposition zeigt, dass alle so gewonnene Mengen, die bestimmte offensichtliche Eigenschaften erfüllen, Fächer sind. Diese Charakterisierung benötigen wir sowohl, um zu sehen, dass der projektive Raum eine torische Varietät eines Fächers ist, als auch, um die wesentliche Surjektivität des Funktors von Fächern zu torischen Varietäten zu zeigen.

Proposition 3.7. *Seien $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ endlich viele Kegel, sodass der Schnitt $\sigma_i \cap \sigma_j$ für alle Paare (i, j) eine Seite von σ_i und σ_j ist. Wir definieren $\Sigma = \Sigma(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = \{\tau \mid \tau \leq \sigma_i \text{ für ein } i\}$. Dann ist Σ ein Fächer. Insbesondere ist für jeden Kegel die Menge $\Sigma(\sigma)$ aller Seiten von σ ein Fächer.*

Beweis Sei $\sigma \in \Sigma$ und $\tau \leq \sigma$. Wir wollen $\tau \in \Sigma$ zeigen. Per Definition ist $\sigma \leq \sigma_i$ für ein i und nach Proposition 2.5 (v) folgt $\tau \leq \sigma_i$, also $\tau \in \Sigma$ wie gewünscht.

Seien nun $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, also $\sigma \leq \sigma_i$ und $\sigma' \leq \sigma_j$. Wir wollen zeigen, dass $\sigma \cap \sigma'$ eine Seite sowohl von σ , als auch von σ' ist. Es gibt $u \in \sigma_i^\vee$, $u' \in \sigma_j^\vee$ mit $\sigma = \sigma_i \cap u^\perp$ und $\sigma' = \sigma_j \cap u'^\perp$. Dann ist

$$\sigma \cap \sigma' = [(\sigma_i \cap \sigma_j) \cap u^\perp] \cap [(\sigma_i \cap \sigma_j) \cap u'^\perp]$$

Schnitt zweier Seiten von $\sigma_i \cap \sigma_j$ und damit nach Proposition 2.5 (iv) wieder eine Seite davon. Nun ist $\sigma_i \cap \sigma_j$ nach Voraussetzung eine Seite von σ_i , also ist nach Proposition 2.5 (v) $\sigma \cap \sigma'$ auch eine Seite von σ_i . Die Inklusionskette $\sigma \cap \sigma' \subseteq \sigma \subseteq \sigma_i$ zeigt dann zusammen mit Proposition 2.5 (vi) die Behauptung $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$. Ganz genauso sieht man $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$. Also ist Σ ein Fächer. \square

Wir werden nun zeigen, dass sich die torischen Varietäten U_σ der einzelnen Kegel σ aus einem Fächer Σ geeignet verkleben lassen. Dafür erzeugen wir ein Setting wie in Proposition A.5: Ist $\tau \leq \sigma$ eine Seite, so sei $U_{\tau\sigma} \subseteq U_\sigma$ das zu $U_{\sigma\tau} := U_\tau$ isomorphe Unterschema (siehe Proposition 3.6). Es bezeichne $g_{\sigma\tau} : U_{\sigma\tau} \rightarrow U_{\tau\sigma}$ den entsprechenden Isomorphismus. Dadurch ist bereits automatisch $U_{\sigma\sigma} = U_\sigma$ und $g_{\sigma\sigma} = \text{id}_{U_\sigma}$ für alle $\sigma \in \Sigma$. Weiter setzen wir für $\tau \leq \sigma$ sinnvollerweise: $g_{\tau\sigma} = g_{\sigma\tau}^{-1}$.

Seien $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ nun beliebige Kegel. Dann ist $\tau = \sigma \cap \sigma'$ eine Seite von beiden und wir definieren $U_{\sigma'\sigma} = U_{\tau\sigma}$, $U_{\sigma\sigma'} = U_{\tau\sigma'}$ sowie $g_{\sigma'\sigma}$ als die Hintereinanderausführung

$$g_{\sigma'\sigma} = g_{\sigma'\tau} \circ g_{\tau\sigma} : U_{\sigma'\sigma} = U_{\tau\sigma} \rightarrow U_{\sigma\tau} = U_{\sigma'\tau} \rightarrow U_{\tau\sigma'} = U_{\sigma\sigma'}.$$

Proposition 3.8. *Das System $(U_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, zusammen mit den Isomorphismen $g_{\sigma'\sigma}$ für jedes Tupel $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma$, erfüllt die Bedingungen (i) bis (iv) aus Proposition A.5.*

Beweis Dass Bedingung (i) erfüllt ist, haben wir bereits festgestellt. Bedingung (ii) gilt für Seiten $\tau \leq \sigma$ per Definition. Sind hingegen $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ beliebig und $\tau = \sigma \cap \sigma'$, so folgt

$$g_{\sigma\sigma'} = g_{\sigma\tau} \circ g_{\tau\sigma'} = g_{\tau\sigma}^{-1} \circ g_{\sigma'\tau}^{-1} = (g_{\sigma'\tau} \circ g_{\tau\sigma})^{-1} = g_{\sigma'\sigma}^{-1}$$

und damit die Behauptung. Für (iii) und (iv) müssen wir weiter ausholen:

Lemma 3.9. *Sind $\tau_1, \tau_2 \leq \sigma$ Kegel in Σ , dann ist $U_{\tau_1\sigma} \cap U_{\tau_2\sigma} = U_{(\tau_1 \cap \tau_2)\sigma}$.*

Beweis Wählen wir $u_1, u_2 \in \sigma^\vee$ mit $\tau_1 = \sigma \cap u_1^\perp$ und $\tau_2 = \sigma \cap u_2^\perp$, so folgt nach dem Beweis von Proposition 3.6: $U_{\tau_1\sigma} = D(\chi^{u_1})$ und $U_{\tau_2\sigma} = D(\chi^{u_2})$. Nach dem Beweis von Proposition 2.5 (iv) ist außerdem $\tau_1 \cap \tau_2 = \sigma \cap (u_1 + u_2)^\perp$ und damit $U_{(\tau_1 \cap \tau_2)\sigma} = D(\chi^{u_1 + u_2}) = D(\chi^{u_1} \chi^{u_2})$. Es folgt

$$U_{\tau_1\sigma} \cap U_{\tau_2\sigma} = D(\chi^{u_1}) \cap D(\chi^{u_2}) = D(\chi^{u_1} \chi^{u_2}) = U_{(\tau_1 \cap \tau_2)\sigma},$$

also die Behauptung. □

Lemma 3.10. *Sind $\gamma \leq \tau \leq \sigma$ Kegel in Σ , so sind für γ, τ, σ (in dieser Reihenfolge) die Bedingungen aus Proposition A.5 (iii) und (iv) erfüllt.*

Beweis Wegen $U_{\tau\gamma} \cap U_{\sigma\gamma} = U_{\tau\gamma} \cap U_\gamma = U_{\tau\gamma}$ und $U_\tau = U_{\sigma\tau}$ folgt zunächst

$$g_{\tau\gamma}(U_{\tau\gamma} \cap U_{\sigma\gamma}) = g_{\tau\gamma}(U_{\tau\gamma}) = U_{\gamma\tau} = U_{\gamma\tau} \cap U_{\sigma\tau},$$

und damit (iii). (iv) behauptet die Gleichheit $g_{\sigma\gamma} = g_{\sigma\tau} \circ g_{\tau\gamma}$, also die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Spec}(k[S_\gamma]) & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{Spec}(k[S_\tau]) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{Spec}(k[S_\sigma]) & & & & \end{array}$$

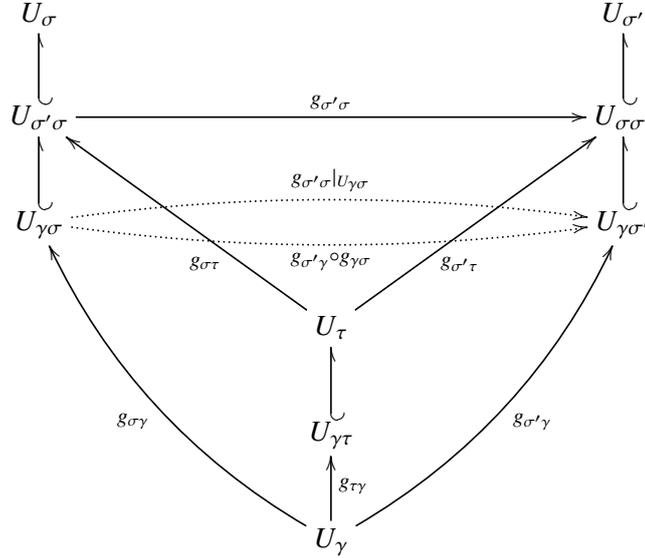
Dass das umgedrehte Diagramm von k -Algebren kommutiert, ist aber trivial. Wegen der Kategorienäquivalenz zwischen affinen Schemata und kommutativen Ringen folgt die Behauptung. □

Lemma 3.11. *Seien $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ Kegel und $\tau = \sigma \cap \sigma'$. Ist $\gamma \leq \tau$ eine Seite (und damit auch eine Seite von σ und σ' , also insbesondere in Σ), so folgt: $g_{\sigma'\sigma}|_{U_{\gamma\sigma}} = g_{\sigma'\gamma} \circ g_{\gamma\sigma}$.*

Beweis Nach Lemma 3.10 ist $g_{\sigma\gamma} = g_{\sigma\tau} \circ g_{\tau\gamma}$ und daher

$$U_{\gamma\sigma} = g_{\sigma\gamma}(U_\gamma) = g_{\sigma\tau}(g_{\tau\gamma}(U_\gamma)) \subseteq g_{\sigma\tau}(U_\tau) = U_{\tau\sigma} = U_{\sigma'\sigma}.$$

Die Behauptung ist also insofern sinnvoll, als dass die Einschränkung $g_{\sigma'\sigma}|_{U_{\gamma\sigma}}$ existiert. Wir betrachten das folgende Diagramm:



Wir schließen nun folgendermaßen: Nach Lemma 3.10 ist $g_{\sigma\tau} \circ g_{\tau\gamma} = g_{\sigma\gamma}$, also $\text{id}_{U_{\gamma\sigma}} = g_{\sigma\tau} \circ g_{\tau\gamma} \circ g_{\gamma\sigma}$. Es folgt:

$$g_{\sigma'\sigma}|_{U_{\gamma\sigma}} = g_{\sigma'\sigma}|_{U_{\gamma\sigma}} \circ \text{id}_{U_{\gamma\sigma}} = g_{\sigma'\sigma}|_{U_{\gamma\sigma}} \circ g_{\sigma\tau} \circ g_{\tau\gamma} \circ g_{\gamma\sigma} = \dots$$

Per Definition ist $g_{\sigma'\sigma} = g_{\sigma'\tau} \circ g_{\sigma\tau}^{-1}$. Wir erhalten also

$$\dots = g_{\sigma'\tau} \circ g_{\tau\gamma} \circ g_{\gamma\sigma} = g_{\sigma'\gamma} \circ g_{\gamma\sigma},$$

wobei im letzten Schritt noch einmal Lemma 3.10 benutzt wurde. \square

Wir beweisen nun Proposition 3.8 zu Ende, indem wir für unser System die Bedingungen (iii) und (iv) aus Proposition A.5 nachweisen:

Proposition 3.12. *Seien $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma$ drei Kegel und. Dann gelten:*

- (i) $g_{\sigma'\sigma}(U_{\sigma'\sigma} \cap U_{\sigma''\sigma}) = U_{\sigma'\sigma} \cap U_{\sigma''\sigma}$
- (ii) $g_{\sigma''\sigma'} \circ g_{\sigma'\sigma} = g_{\sigma''\sigma}$ auf $U_{\sigma'\sigma} \cap U_{\sigma''\sigma}$

Beweis Wir setzen $\tau_1 = \sigma \cap \sigma'$, $\tau_2 = \sigma \cap \sigma''$, $\tau_3 = \sigma' \cap \sigma''$, und $\gamma = \sigma \cap \sigma' \cap \sigma''$. Dann ist $\gamma = \tau_1 \cap \tau_2 = \tau_1 \cap \tau_3 = \tau_2 \cap \tau_3 \in \Sigma$. Nach Lemma 3.9 ist dann $U_{\sigma'\sigma} \cap U_{\sigma''\sigma} = U_{\tau_1\sigma} \cap U_{\tau_2\sigma} = U_{\gamma\sigma}$ und analog $U_{\sigma'\sigma'} \cap U_{\sigma''\sigma'} = U_{\gamma\sigma'}$. Wir sehen also mit Hilfe von Lemma 3.11

$$g_{\sigma'\sigma}(U_{\sigma'\sigma} \cap U_{\sigma''\sigma}) = g_{\sigma'\sigma}(U_{\gamma\sigma}) = (g_{\sigma'\gamma} \circ g_{\gamma\sigma})(U_{\gamma\sigma}) = g_{\sigma'\gamma}(U_\gamma) = U_{\gamma\sigma'} = U_{\sigma'\sigma'} \cap U_{\sigma''\sigma'}$$

und damit Behauptung (i). Wenden wir Lemma 3.11 auch auf die Abbildung $g_{\sigma''\sigma'}|_{U_{\gamma\sigma'}}$ an, so erhalten wir:

$$(g_{\sigma''\sigma'} \circ g_{\sigma'\sigma})|_{U_{\gamma\sigma}} = (g_{\sigma''\gamma} \circ g_{\gamma\sigma'}) \circ (g_{\sigma'\gamma} \circ g_{\gamma\sigma}) = g_{\sigma''\gamma} \circ g_{\gamma\sigma} = g_{\sigma''\sigma}|_{U_{\gamma\sigma}},$$

wobei wir im letzten Schritt noch einmal Lemma 3.11 benutzt haben. \square

Die Verklebung der affinen offenen Teile U_σ bezeichnen wir mit X_Σ und nennen dies die zu Σ gehörige torische Varietät. Wir werden später sehen, dass dies wirklich eine torische Varietät definiert. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir für das zu U_σ isomorphe Bild in X_Σ wieder U_σ . Beachte: Jeder Kegel $\sigma \in \Sigma$ ist strikt konvex, enthält also $\{0\}$ als Seite und dies ist dann wieder ein Element von Σ . Folglich ist unser Torus $T = \text{Spec}(k[M]) = U_{\{0\}}$ eine offene Teilmenge von X_Σ . Zusammenfassend haben wir also gezeigt:

Proposition 3.13. *Sei Σ ein Fächer. Dann kann man dazu ein Schema X_Σ assoziieren, das eine affine, offene Überdeckung $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$ mit folgenden Eigenschaften besitzt: $U_\sigma \cap U_{\sigma'} = U_{\sigma \cap \sigma'}$ für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und die Einbettung $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ wird für $\tau \leq \sigma$ von der natürlichen Inklusion $k[S_\tau] \rightarrow k[S_\sigma]$ induziert. Ist $\Sigma = \Sigma(\sigma)$ im Sinne von Proposition 3.7, dann ist außerdem $X_\Sigma = U_\sigma$. Zudem besitzt jedes X_Σ eine kanonische offene Immersion $T \rightarrow X_\Sigma$ des Torus $T = U_{\{0\}} = \text{Spec}(k[M])$. \square*

Beispiel 3.14. Wir betrachten das Gitter $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ und die Vektoren v_0, \dots, v_n , gegeben durch $v_0 = -e_1 - \dots - e_n$ sowie $v_i = e_i$ für $i \geq 1$. Wir definieren $\sigma_i = \text{Cone}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ für $i \in \{0, \dots, n\}$. Diese Kegel erfüllen die Schnittbedingung aus Proposition 3.7, weswegen $\Sigma = \Sigma(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ ein Fächer ist. Wir zeigen: Es ist $X_\Sigma \cong \mathbb{P}_k^n$ der n -dimensionale projektive Raum über k .

Beweis Für die zugehörigen Monoide gilt:

$$S_{\sigma_0} = \langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle, S_{\sigma_i} = \langle -e_i^*, -e_i^* + e_1^*, \dots, \hat{i}, \dots, -e_i^* + e_n^* \rangle \text{ für } i \neq 0$$

Die Darstellung von S_{σ_i} führen wir ein wenig aus. Die Inklusion von rechts nach links ist klar. Für die andere geben wir uns $u = \sum_{j=1}^n a_j e_j^* \in S_{\sigma_i}$ vor, wobei $a_j \in \mathbb{Z}$. Per Definition von S_{σ_i} folgt $-\sum_{j=1}^n a_j \geq 0$ und $a_j \geq 0$ für alle $j \neq i$. Daher ist

$$u = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j (-e_i^* + e_j^*) + \left(-\sum_{j=1}^n a_j \right) (-e_i^*)$$

eine Darstellung von u im angegebenen Erzeugnis.

Wir erhalten $U_{\sigma_0} = \text{Spec}(k[Y_1, \dots, Y_n])$ und $U_{\sigma_i} = \text{Spec}(k[Y_i^{-1}, Y_i^{-1}Y_1, \dots, \hat{i}, \dots, Y_i^{-1}Y_n])$ für $i \neq 0$. Definieren wir den projektiven Raum wie in Beispiel A.6 als Verklebung der affinen Schemata $U_i = \text{Spec}\left(k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]\right)$, so sehen wir: Der Koordinatenwechsel $Y_i \mapsto \frac{X_i}{X_0}$ induziert einen Isomorphismus $U_i \cong U_{\sigma_i}$ von Schemata über k für jedes i . Wir müssen noch einsehen, dass diese Isomorphismen mit den Verklebungen verträglich sind:

Man sieht leicht $\sigma_i \cap \sigma_j = \text{Cone}(v_k, k \neq i, j)$ und folglich für $i \neq 0$ nach Proposition 2.23 (ii):

$$S_{\sigma_0 \cap \sigma_i} = S_{\sigma_0} + S_{\sigma_i} = \langle e_1^*, \dots, e_n^*, -e_i^* \rangle = \langle -e_i^*, -e_i^* + e_1^*, \dots, \hat{i}, \dots, -e_i^* + e_n^*, e_i^* \rangle$$

sowie für $i, j \neq 0$ und $i \neq j$

$$\begin{aligned} S_{\sigma_j \cap \sigma_i} &= S_{\sigma_j} + S_{\sigma_i} = \langle -e_i^*, -e_i^* + e_1^*, \dots, \hat{i}, \dots, -e_i^* + e_n^*, e_i^* - e_j^* \rangle \\ &= \langle -e_j^*, -e_j^* + e_1^*, \dots, \hat{j}, \dots, -e_j^* + e_n^*, e_j^* - e_i^* \rangle. \end{aligned}$$

Für die zugehörigen Schemata erhalten wir also

$$U_{\sigma_0 \cap \sigma_i} = \text{Spec}(k[Y_1, \dots, Y_n]_{Y_i}) = \text{Spec}\left(k\left[Y_i^{-1}, Y_i^{-1}Y_1, \dots, \hat{i}, \dots, Y_i^{-1}Y_n\right]_{Y_i^{-1}}\right)$$

beziehungsweise für $i, j \neq 0$

$$\begin{aligned} U_{\sigma_i \cap \sigma_j} &= \text{Spec}\left(k\left[Y_i^{-1}, Y_i^{-1}Y_1, \dots, \hat{i}, \dots, Y_i^{-1}Y_n\right]_{\frac{Y_j}{Y_i}}\right) \\ &= \text{Spec}\left(k\left[Y_j^{-1}, Y_j^{-1}Y_1, \dots, \hat{j}, \dots, Y_j^{-1}Y_n\right]_{\frac{Y_i}{Y_j}}\right). \end{aligned}$$

Man sieht also, dass sich $U_{\sigma_i \cap \sigma_j}$ wieder unter dem gleichen Koordinatenwechsel $Y_i \mapsto \frac{X_i}{X_0}$ mit $U_{j,i} = D(\frac{X_j}{X_i}) \subseteq U_i$ beziehungsweise $U_{i,j}$ identifiziert. Folglich ist \mathbb{P}_k^n isomorph zur Verklebung der U_{σ_i} entlang der $U_{\sigma_i \cap \sigma_j}$. Wir verzichten hier auf den einfachen Beweis, dass sich dies auf kanonische Weise mit X_Σ identifiziert. Im wesentlichen kommen in X_Σ nur redundante Verklebeinformationen hinzu. Im Beweis von Theorem 4.22 werden wir die Argumentation vollständig durchführen. \square

3.3 X_Σ ist eine torische Varietät

Wir haben bisher zu einem Kegel σ eine Varietät U_σ und allgemeiner zu einem Fächer Σ eine Varietät X_Σ definiert. Wir wollen in diesem Abschnitt verstehen, dass dies tatsächlich torische Varietäten sind. Im Wesentlichen müssen wir daher verstehen, warum Tori mit der vor Definition 1.14 definierten Multiplikation Gruppenschemata sind und wie sie auf der torischen Varietät wirken, siehe auch Definitionen 1.12 und 1.13. Kurzfristig arbeiten wir dazu wieder mit allgemeinen kommutativen Ringen, da es keinen Grund gibt, sich auf (algebraisch abgeschlossene) Körper einzuschränken:

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, M eine abelsche Gruppe, $S \subseteq M$ ein Untermonoid und $R[S] \subseteq R[M]$ die Algebren darüber. Selbstverständlich soll dabei M an ein Gitter und S an einen affinen Monoid S_σ eines Kegels σ erinnern. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : R[S] \rightarrow R[M] \otimes_R R[S], \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Polynomrings setzt sich das wirklich wohldefiniert zu einem R -Algebrenhomomorphismus fort. Wir setzen $T := \text{Spec}(R[M])$, $U := \text{Spec}(R[S])$ (T beziehungsweise U erinnern gewollt an den Torus sowie eine torische Varietät U_σ). Dann induziert φ auf den Faserprodukten einen Morphismus

$${}^a\varphi : T \times_R U \rightarrow U,$$

der sich später als Wirkung von T auf U herausstellen soll. Für jedes Schema Z über $\text{Spec}(R)$ bekommen wir dann eine induzierte Abbildung von Mengen

$$\psi : T(Z) \times U(Z) \rightarrow U(Z),$$

$$({}^a f, {}^a g) \mapsto {}^a\varphi \circ [{}^a f, {}^a g] = {}^a([f, g] \circ \varphi),$$

wobei $f : R[M] \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ und $g : R[S] \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ R -Algebrenhomomorphismen sind und $[{}^a f, {}^a g]$ beziehungsweise $[f, g]$ die aus der universellen Eigenschaft des Faserprodukts beziehungsweise Tensorprodukts hervorgehenden, eindeutig bestimmten Abbildungen sind.

Wir studieren ψ genauer: Sei dazu $e : R[M] \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ der eindeutige R -Algebrenhomomorphismus, der durch $\chi^u \mapsto 1$ für alle $u \in M$ festgelegt ist. Wir wollen

$$\psi({}^a e, {}^a g) = {}^a([e, g] \circ \varphi) = {}^a g,$$

zeigen, oder äquivalent $[e, g] \circ \varphi = g$ für alle $g : R[S] \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$. Für $u \in M$ ist aber

$$([e, g] \circ \varphi)(\chi^u) = [e, g](\chi^u \otimes \chi^u) = e(\chi^u) \cdot g(\chi^u) = g(\chi^u),$$

woraus die Behauptung folgt. Auch lässt sich die gemischte Assoziativität zeigen. Dazu setzen wir zunächst $\varphi' : R[M] \rightarrow R[M] \otimes_R R[M]$, $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$, was wie oben ein ${}^a\varphi' : T \times_R T \rightarrow T$ und ein $\psi' : T(Z) \times T(Z) \rightarrow T(Z)$ induziert. Seien nun $f, g : R[M] \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ und $h : R[S] \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ beliebig. Die Behauptung $\psi(\psi'({}^a f, {}^a g), {}^a h) = \psi({}^a f, \psi({}^a g, {}^a h))$ ist dann gleichbedeutend zur Behauptung

$$[[f, g] \circ \varphi', h] \circ \varphi = [f, [g, h] \circ \varphi] \circ \varphi,$$

was sich wieder leicht auf den Monomen nachrechnen lässt. Mit diesen Feststellungen können wir folgende Proposition formulieren:

Proposition 3.15. *Sei Z ein beliebiges R -Schema. Ist $T = \text{Spec}(R[M])$ für eine abelsche Gruppe M , dann ist $T(Z)$ zusammen mit der Abbildung ψ' eine Gruppe mit neutralem Element ${}^a e : Z \rightarrow T$. Ist $U = \text{Spec}(R[S])$ für einen Untermonoid $S \subseteq M$, so ist durch $\psi : T(Z) \times U(Z) \rightarrow U(Z)$ eine Gruppenwirkung der Gruppe $T(Z)$ auf der Menge $U(Z)$ gegeben. Mit anderen Worten: $(T, {}^a \varphi')$ ist ein Gruppenschema, und der Morphismus ${}^a \varphi$ ist eine Wirkung von T auf U .*

Beweis Es ist nur noch zu prüfen, dass es bezüglich ψ' ein Inverses zu jedem Morphismus ${}^a f : Z \rightarrow T$ gibt. Es ist also ein R -Algebrenhomomorphismus $g : R[M] \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ zu konstruieren mit

$$[f, g] \circ \varphi' = e.$$

Sei dazu $u \in M$ beliebig. Hätten wir ein g mit dieser Eigenschaft gefunden, so folgte

$$f(\chi^u) \cdot g(\chi^u) = [f, g](\chi^u \otimes \chi^u) = ([f, g] \circ \varphi')(\chi^u) = e(\chi^u) = 1.$$

Wir sind also gezwungen, $g(\chi^u) = f(\chi^u)^{-1}$ zu setzen. Dazu muss $f(\chi^u)^{-1}$ in $\mathcal{O}_Z(Z)$ existieren. Hier zahlt sich zum ersten mal aus, dass M eine Gruppe ist und nicht nur ein Monoid: Es ist einfach $f(\chi^u)^{-1} = f(\chi^{-u})$, weswegen g sich mit der eben angegebenen Definition zu einem wohldefinierten R -Algebrenhomomorphismus fortsetzt. \square

Sei nun speziell $R = k$ unser algebraisch abgeschlossener Körper, M unser Gitter und $S = S_\sigma \subseteq M$ ein affines Monoid, gehörig zu einem Kegel σ . Dann haben wir soeben gezeigt, dass $T = U_{\{0\}}$ ein Gruppenschema ist, dass auf dem Schema U_σ wirkt.

Proposition 3.16. *Sei σ ein Kegel. Dann ist $T = U_{\{0\}} \rightarrow U_\sigma$ eine torische Varietät.*

Beweis Dass U_σ integer und vom endlichen Typ über k ist, haben wir bereits in Proposition 3.2 gesehen, und die offene Immersion $T \rightarrow U_\sigma$ kennen wir aus Proposition 3.6. Dass $U_{\{0\}}$ auf U_σ wirkt, haben wir oben bereits eingesehen. Schließlich setzt die Wirkung offenbar die Wirkung von T auf sich selbst fort, wie man leicht einsieht, wenn man sich auf das umgedrehte Diagramm von k -Algebren zurückzieht. \square

Die Hauptarbeit ist damit erledigt. Im Grunde beschränkt sich der Nachweis, dass X_Σ eine torische Varietät ist, auf die Feststellung, dass sich „alles verklebt“. Wir geben dennoch die technischen Beweise:

Proposition 3.17. *Das Schema X_Σ ist wieder auf kanonische Weise ein Schema vom endlichen Typ über dem Körper k .*

Beweis Jedes der offenen Teile U_σ hat einen Strukturmorphismus $\varphi_\sigma : U_\sigma \rightarrow k$, der einfach vom kanonischen Homomorphismus $k \rightarrow k[S_\sigma]$ kommt. Sind $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und $\tau = \sigma \cap \sigma'$, so genügt es zu zeigen, dass sich φ_σ und $\varphi_{\sigma'}$ auf dem Schnitt U_τ zur gleichen Abbildung einschränken, denn dann erhalten wir durch Verkleben einen Strukturmorphismus $X_\Sigma \rightarrow k$. Wegen der Symmetrie genügt es also zu zeigen: $\varphi_\sigma \circ g_{\sigma\tau} = \varphi_\tau$. Das ist aber äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} & k[S_\sigma] & \\ & \nearrow & \searrow \\ k & \xrightarrow{\quad} & k[S_\tau] \end{array}$$

und damit trivial. Dass X_Σ von endlichem Typ über k ist folgt daraus, dass es die einzelnen U_σ sind, und weil X_Σ per Definition von endlich vielen solcher offener affiner Unterschemata überdeckt wird. \square

Alle Morphismen sind (wenn das nicht zu zeigen ist), von nun an als k -Morphismen vorausgesetzt. Alle Faserprodukte, die ab jetzt auftauchen, sind immer als Faserprodukte über $\text{Spec}(k)$ zu verstehen, in der Notation wird das nicht zu sehen sein.

Wir setzen die Toruswirkungen von $T = \text{Spec}(k[M])$, die auf den U_σ gegeben sind, nach X_Σ fort: $T \times U_\sigma \rightarrow U_\sigma \rightarrow X_\Sigma$. X_Σ wird offen überdeckt von den U_σ , also wird $T \times X_\Sigma$ offen überdeckt von den $T \times U_\sigma$. Die Behauptung ist, dass die Toruswirkungen auf den Schnitten übereinstimmen und somit einen Morphismus $T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ ermöglichen. Beachte Proposition A.1, die wir in den nächsten Propositionen mehrmals ohne Erwähnung verwenden werden.

Proposition 3.18. *Es seien σ, σ' Kegel und τ ihr Schnitt. Dann schränken sich die Morphismen $T \times U_\sigma \rightarrow X_\Sigma$ und $T \times U_{\sigma'} \rightarrow X_\Sigma$ zu dem gleichen Morphismus auf dem Schnitt $T \times U_\tau$ ein.*

Beweis Wegen der Symmetrie ist lediglich nachzuweisen, dass die Hintereinanderausführung $T \times U_\tau \rightarrow T \times U_\sigma \rightarrow X_\Sigma$ mit der Toruswirkung auf U_τ übereinstimmt:

$$\begin{array}{ccccc}
 T \times U_\tau & \xrightarrow{\quad} & U_\tau & \xrightarrow{\quad} & X_\Sigma \\
 & \searrow & & \searrow & \nearrow \\
 & & T \times U_\sigma & \xrightarrow{\quad} & U_\sigma
 \end{array}$$

Das rechte Dreieck kommutiert automatisch, da es nur ein Diagramm von Inklusionen ist. Dass die linke Raute kommutiert ist trivial, wenn man sich das duale Diagramm auf den k -Algebren ansieht. \square

Das zeigt, dass man die Torusaktion zu einem Schemamorphismus $T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ ausweiten kann. Da dies auf den affinen offenen Teilen $T \times U_\sigma$ ein k -Morphismus ist, und man Kommutativität von Diagrammen lokal prüfen kann, ist auch der ganze Morphismus ein k -Morphismus.

Wir möchten zeigen, dass $T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ wieder eine Wirkung im Sinne der Schematheorie ist. Dazu verwenden wir die Charakterisierung, die in Proposition A.2 angegeben wird.

Proposition 3.19. *Der Morphismus $T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ ist wieder eine Wirkung im Sinne der Schematheorie.*

Beweis Sei $U_\sigma \subseteq X_\Sigma$ einer der affinen offenen Teile. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & T \times (T \times U_\sigma) & \xrightarrow{\quad} & T \times U_\sigma & & \\
 & & \swarrow & & \downarrow & & \\
 & & (T \times T) \times U_\sigma & & U_\sigma & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & T \times U_\sigma & \xrightarrow{\quad} & U_\sigma & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & (T \times T) \times X_\Sigma & \xrightarrow{\quad} & T \times X_\Sigma & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & T \times X_\Sigma & \xrightarrow{\quad} & X_\Sigma & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & T \times X_\Sigma & \xrightarrow{\quad} & X_\Sigma & &
 \end{array}$$

Wir müssen zeigen, dass das Fünfeck rechts unten kommutiert und wissen von der Kommutativität des Fünfecks links oben. Alle fünf schrägen Vierecke kommutieren ebenfalls: Das linke wegen Proposition 1.16, das untere und rechte per Definition der Gruppenwirkung $T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ als Fortsetzung

der Wirkung $T \times U_\sigma \rightarrow X_\Sigma$, das obere wieder wegen Proposition 1.16 und weil das rechte und untere Diagramm kommutieren, und das links oben aufgrund der Natürlichkeit des Isomorphismus $X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z$ in einer jeden Kategorie, in der Faserprodukte existieren.

Da die offenen Teile $T \times (T \times U_\sigma)$ ganz $T \times (T \times X_\Sigma)$ überdecken, wenn σ ganz Σ durchläuft, folgt also die Kommutativität des Fünfecks rechts unten aus der Kommutativität des Fünfecks links oben. Mit der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} T \times X_\Sigma & \longrightarrow & X_\Sigma \\ \uparrow & \nearrow & \\ k \times X_\Sigma & & \end{array}$$

verfahren wir ähnlich und sehen somit insgesamt, dass wir tatsächlich eine Wirkung von T auf X_Σ gegeben haben. \square

Proposition 3.20. X_Σ ist eine torische Varietät.

Beweis Dass X_Σ vom endlichen Typ über k ist, haben wir bereits in 3.17 gesehen. Dass X_Σ integer ist, folgt daraus, dass die Überdeckung $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$ offenbar alle Eigenschaften aus Proposition A.4 erfüllt. Dass $T = U_{\{0\}}$ auf X_Σ wirkt, ist gerade die Aussage von Proposition 3.19, und dass sie diejenige von T auf sich selbst fortsetzt, folgt unmittelbar aus der Definition der Wirkung $T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ als Fortsetzung der Wirkungen von T auf den U_σ , also insbesondere auf $U_{\{0\}} = T$. \square

3.4 Torische Morphismen

Wie in Kapitel 1 angekündigt, ist ein wichtiges Zwischenziel ein volltreuer Funktor $X : (\text{FAN}) \rightarrow (\text{TOV})$. Bisher haben wir die Objektabbildung erklärt, indem wir jedem Fächer Σ eine torische Varietät X_Σ zugewiesen haben. Nun geht es um die Morphismen: Wie können wir einem Fächermorphismus $\varphi : (N, \Sigma) \rightarrow (N', \Sigma')$ einen Morphismus torischer Varietäten $\varphi_* : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ zuweisen?

Sei also $\varphi : (N, \Sigma) \rightarrow (N', \Sigma')$ ein Fächermorphismus, das heißt ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : N \rightarrow N'$, dessen Skalarerweiterung jeden Kegel aus Σ in einen Kegel aus Σ' abbildet (Siehe Definition 1.6). Es bezeichne $\varphi^\vee : M' \rightarrow M$ den dualen Homomorphismus auf den dualen Gittern, gegeben durch $\varphi^\vee(u) = u \circ \varphi$. Sei nun $\sigma \in \Sigma$ und ein zugehöriges $\sigma' \in \Sigma'$ mit $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma'$ gegeben. Wir behaupten, dass sich φ^\vee wohldefiniert zu einem (identisch bezeichneten) Monoidhomomorphismus $S_{\sigma'} \rightarrow S_\sigma$ einschränkt: In der Tat, ist $u \in S_{\sigma'}$ und $v \in \sigma$, dann folgt wegen $\varphi(v) \in \sigma'$ sofort $\varphi^\vee(u)(v) = u(\varphi(v)) \geq 0$. Wir erhalten also einen Schemamorphismus $\varphi_* : U_\sigma \rightarrow U_{\sigma'}$ über k . Diesen setzen wir fort zu einem Morphismus nach $X_{\Sigma'}$, den wir wieder genauso bezeichnen: $\varphi_* : U_\sigma \rightarrow U_{\sigma'} \rightarrow X_{\Sigma'}$. Wir erinnern daran, dass äquivariante Morphismen torischer Varietäten solche sind, die mit der Wirkung der Tori verträglich sind (siehe Definition 1.15), und dass wir sie naheliegenderweise auch torische Morphismen nennen.

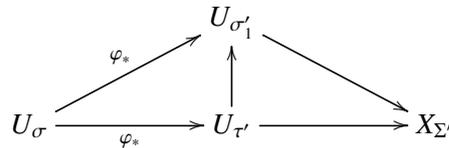
Proposition 3.21.

- (i) Zu gegebenem $\sigma \in \Sigma$ ist der Morphismus $\varphi_* : U_\sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ unabhängig von der Wahl von $\sigma' \in \Sigma'$ mit $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma'$
- (ii) Die Morphismen $U_\sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ stimmen auf den Schnitten überein, verkleben sich also wohldefiniert zu einem k -Schemamorphismus $\varphi_* : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$.

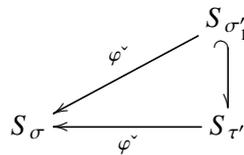
(iii) Der Morphismus φ_* ist ein äquivarianter Morphismus, das heißt ein Morphismus torischer Varietäten.

Beweis

(i) Sei $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma'_1$ und $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma'_2$. Dann ist auch $\varphi(\sigma) \subseteq \tau' = \sigma'_1 \cap \sigma'_2$, sodass wegen der Symmetrie nur die Kommutativität des Diagramms

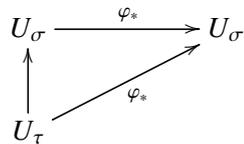


zu zeigen ist. Das rechte Dreieck kommutiert, da es ein Diagramm von Inklusionen ist, und die Kommutativität des linken lässt sich zurückführen auf die trivialerweise erfüllte Kommutativität von



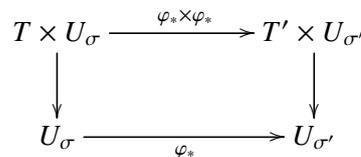
□

(ii) Wir müssen die Behauptung ähnlich wie zuvor wieder nur für Seiten nachweisen. Das heißt: Sei $\tau \leq \sigma$ und $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma'$. Dann ist die Kommutativität des Diagramms



zu prüfen. Auf den zugehörigen Monoiden ist das aber genauso wie in (i) eine Trivialität. □

(iii) Ähnlich wie im Beweis zu Proposition 3.19 können wir uns auf affine offene Teile zurückziehen. Wir wollen also für $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma'$ die Kommutativität des Diagramms



einsehen. Beachte, dass der Morphismus $\varphi_* : T \rightarrow T'$ wegen $\varphi(\{0\}) \subseteq \{0\}$ wohldefiniert ist. Wie immer sind wir beim umgedrehten Diagramm von k -Algebren mit einer Trivialität konfrontiert. Setzen wir im kommutativen Diagramm außerdem $\sigma = \{0\}$ und $\sigma' = \{0\}$, so sehen wir, dass sich φ_* zu einem Morphismus von Gruppenschemata $T \rightarrow T'$ im Sinne von Proposition A.3 einschränkt. □

Proposition 3.22. *Es seien*

$$(N, \Sigma) \xrightarrow{\varphi} (N', \Sigma') \xrightarrow{\psi} (N'', \Sigma'')$$

Fächermorphismen. Dann folgt:

(i) $(id_{(N,\Sigma)})_* = id_{X_\Sigma}$

(ii) $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$

Beweis Behauptung (i) ist unmittelbar klar. Die zweite Behauptung können wir wieder auf einer offenen Überdeckung überprüfen. Sei also $\sigma \in \Sigma$ gegeben und dazu $\sigma' \in \Sigma'$ und $\sigma'' \in \Sigma''$ mit $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma', \psi(\sigma') \subseteq \sigma''$. Dann ist auch $(\psi \circ \varphi)(\sigma) \subseteq \sigma''$ und wir müssen die Kommutativität folgenden Diagramms nachweisen:

$$\begin{array}{ccccc}
 U_\sigma & \xrightarrow{\varphi_*} & U_{\sigma'} & \xrightarrow{\psi_*} & U_{\sigma''} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & (\psi \circ \varphi)_*
 \end{array}$$

Führen wir das auf das umgedrehte Diagramm für k -Algebren zurück, und schließlich auf die zugrundeliegenden Morphismen von Monoiden, so müssen wir also nur $(\psi \circ \varphi)^\vee = \varphi^\vee \circ \psi^\vee$ zeigen, und das ist trivial. □

Proposition 3.23. Sind $\varphi_1, \varphi_2 : (N, \Sigma) \rightarrow (N', \Sigma')$ zwei Fächermorphismen mit $(\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*$, so ist bereits $\varphi_1 = \varphi_2$.

Beweis Die Behauptung impliziert insbesondere, dass die Einschränkungen $(\varphi_1)_*, (\varphi_2)_* : T \rightarrow T'$ übereinstimmen, was nichts anderes bedeutet, als dass die dualen Abbildungen $\varphi_1^\vee, \varphi_2^\vee : M' \rightarrow M$ identisch sind. Wir wollen zeigen, dass dann schon $\varphi_1 = \varphi_2$ ist. Angenommen nicht: Dann gibt es ein $n \in N$ mit $\varphi_1(n) \neq \varphi_2(n)$. Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine beliebige Basis von N' , so unterscheiden sich die Darstellungen von $\varphi_1(n)$ und $\varphi_2(n)$ bezüglich dieser Basis also an einer Stelle $i \in \{1, \dots, n\}$. Folglich ist $b_i^*(\varphi_1(n)) \neq b_i^*(\varphi_2(n))$. Es folgt:

$$\varphi_1^\vee(b_i^*)(n) = b_i^*(\varphi_1(n)) \neq b_i^*(\varphi_2(n)) = \varphi_2^\vee(b_i^*)(n)$$

und damit $\varphi_1^\vee \neq \varphi_2^\vee$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Wir können nun folgendes Theorem formulieren:

Theorem 3.24. Die Zuordnung $X : (FAN) \rightarrow (TOV)$, gegeben $\Sigma \mapsto X_\Sigma$ und $\varphi \mapsto \varphi_*$, ist ein volltreuer Funktor. □

Beweis Lediglich die Vollheit bliebe noch zu zeigen. Eine Quelle für den etwas aufwendigen Beweis ist [Oda, Chap. 1.5]. □

3.5 Normalität und Separiertheit

Sei (N, Σ) ein beliebiger, fixierter Fächer, M wie immer das duale Gitter. N und M seien beide eingebettet in ihre Erweiterungen zu \mathbb{R} -Vektorräumen $N_{\mathbb{R}}$ und $M_{\mathbb{R}}$. Wir zeigen in diesem Abschnitt die Normalität und Separiertheit (siehe Definitionen A.7 und A.13) von X_Σ und brauchen dazu ein wenig Vorarbeit.

Lemma 3.25. Es sei $N_1 \leq N$ eine Untergruppe des Gitters N . Dann ist auch N_1 ein Gitter. Außerdem existiert eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von N und Zahlen $k_1, \dots, k_l \geq 1$ ($l \leq n$), sodass $\{k_1 b_1, \dots, k_l b_l\}$ eine Basis von N_1 ist.

Beweis Das ist ein Spezialfall des Elementarteilersatzes über endlich erzeugte freie Moduln über Hauptidealringen, siehe zum Beispiel [Bos, §6.3]. □

Definition 3.26 (Primitiv). Ein Element $v \in N \setminus \{0\}$ heißt *primitiv*, falls aus $k \cdot v' = v$ für ein $v' \in N$ und ein $k \geq 1$ bereits $k = 1$ und damit $v = v'$ folgt.

Lemma 3.27.

- (i) Es sei $N_1 \subseteq N$ eine Untergruppe, sodass N/N_1 torsionsfrei ist. Dann existiert eine Untergruppe $N_2 \subseteq N$ mit $N = N_1 \oplus N_2$.
- (ii) Es sei $v \in N \setminus \{0\}$ primitiv. Dann existiert eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von N mit $v = b_1$.

Beweis

- (i) Nach Lemma 3.25 können wir eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von N und natürliche Zahlen $k_1, \dots, k_l \geq 1$ wählen, sodass $\{k_1 b_1, \dots, k_l b_l\}$ eine Basis von N_1 ist. Sei $i \in \{1, \dots, l\}$. Wegen $k_i b_i \in N_1$ ist $k_i b_i = 0$ und wegen der Torsionsfreiheit des Quotienten folgt $\bar{b}_i = 0$. Also ist $b_i \in N_1$, das heißt es gibt ganze Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ mit $b_i = \sum_{j=1}^l \lambda_j k_j b_j$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der b_j folgt $1 = \lambda_i k_i$ und damit $k_i = 1$. Setzen wir dann $N_2 = \langle b_{l+1}, \dots, b_n \rangle$, so folgt

$$N = \langle b_1, \dots, b_l \rangle \oplus \langle b_{l+1}, \dots, b_n \rangle = N_1 \oplus N_2,$$

also das, was wir zeigen wollte. □

- (ii) Wir definieren $N_1 = \langle v \rangle$. Nach (i) genügt es zu zeigen, dass N/N_1 torsionsfrei ist, denn haben wir erst einmal eine Zerlegung $N = N_1 \oplus N_2$, so ist die Ergänzung einer Basis von N_2 um das Element v eine Basis von N . Angenommen, N/N_1 wäre nicht torsionsfrei. Dann gäbe es $n \in N$ mit $n \notin N_1$ sowie $k, k' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass $kn = k'v$. Ohne Einschränkung können wir k und k' als teilerfremd annehmen. Weiter stellen wir fest, dass k keine Einheit ist, denn sonst wäre $n \in N_1$, was nach Annahme nicht der Fall ist. Wir wählen nun $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ak + bk' = 1$. Aus $k'v = kn$ folgt dann $bk'v = bkn$, also $(1 - ak)v = bkn$ und somit $v = k(av + bn)$. Da k keine Einheit ist und wegen $av + bn \in N$ widerspricht das aber der Voraussetzung, dass v primitiv ist. Also ist N/N_1 torsionsfrei. □

Lemma 3.28. Es sei $v \in N$ primitiv und $\rho = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v$ der davon aufgespannte Kegel. Dann ist $k[S_\rho]$ ein ganzabgeschlossener Integritätsring.

Beweis Nach Lemma 3.27 gibt es eine Basis $\{v, b_2, \dots, b_n\}$ von N . Sei $\{v^*, b_1^*, \dots, b_n^*\}$ die zugehörige duale Basis in M . Schreiben wir $X_1 = \chi^{v^*}$ und $X_i = \chi^{b_i^*}$ für $i \geq 2$, so folgt mit Beispiel 3.3: $k[S_\rho] = k[X_1, X_2, X_2^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$, und das stimmt im rationalen Funktionenkörper $k(X_1, \dots, X_n)$ offenbar überein mit der Lokalisierung $k[X_1, \dots, X_n]_{X_2 \cdots X_n}$. Nun ist $k[X_1, \dots, X_n]$ als faktorieller Ring ganzabgeschlossen, und damit auch die Lokalisierung $k[S_\rho]$, siehe Beispiel A.8 und Proposition A.10. □

Proposition 3.29. Das Schema X_Σ ist normal.

Beweis Wegen $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{Spec}(k[S_\sigma])$ genügt es nach A.11 nachzuweisen, dass jeder der Integritätsringe $k[S_\sigma]$ ganzabgeschlossen ist.

Es sei $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq N$ ein Erzeugendensystem von σ . Ohne Einschränkung können wir durch geeignetes Skalieren erreichen, dass die v_i primitiv sind. Wir betrachten außerdem die von den Erzeugern aufgespannten Kegel $\rho_i = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v_i$. Da die v_i ganz σ erzeugen, folgt $\sigma^\vee = \bigcap_{i=1}^s \rho_i^\vee$ und damit unmittelbar

$$S_\sigma = \bigcap_{i=1}^s S_{\rho_i}.$$

Wir behaupten, dass daraus auch $k[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^s k[S_{\rho_i}]$ folgt, wobei wir den Schnitt in $k[M]$ bilden. Die Inklusion von links nach rechts ist klar. Sei f im rechten Schnitt enthalten. Wir identifizieren in diesem Beweis S_ρ mit den Monomen $\{\chi^u \mid u \in S_\rho\}$. Dann liegt f im Schnitt aller Erzeugnisse von S_{ρ_i} über k . Wegen $S_{\rho_i} \subseteq M$, und da M über k linear unabhängig ist, ist die Darstellung von f als Linearkombination von Elementen aus S_{ρ_i} unabhängig von i . Es folgt $f \in k[\bigcap_{i=1}^s S_{\rho_i}] = k[S_\sigma]$.

Nun ist jedes $k[S_{\rho_i}]$ nach Lemma 3.28 ganzabgeschlossen und Teilring des Integritätsrings $k[M]$. Nach Proposition A.12 folgt die Behauptung. \square

Wir zeigen nun, dass X_Σ separiert über k ist. Gemäß unserer Konvention, das Grundschema zu ignorieren, sagen wir dazu einfach: X_Σ ist separiert.

Lemma 3.30. *Abgeschlossenheit in topologischen Räumen lässt sich lokal überprüfen. Genauer: Sei X ein topologischer Raum und $Z \subseteq X$. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Dann ist Z genau dann abgeschlossen, wenn $Z \cap U_i$ abgeschlossen in U_i ist für jedes $i \in I$.*

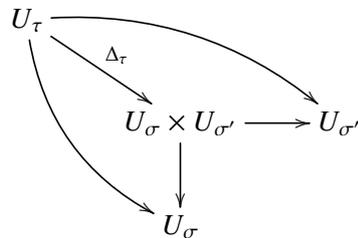
Beweis Ist Z abgeschlossen, dann ist $Z \cap U_i$ per Definition der induzierten Topologie abgeschlossen in U_i . Ist umgekehrt jedes $Z \cap U_i$ abgeschlossen in U_i , so ist

$$Z^c = Z^c \cap \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (Z^c \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} (U_i \setminus (U_i \cap Z))$$

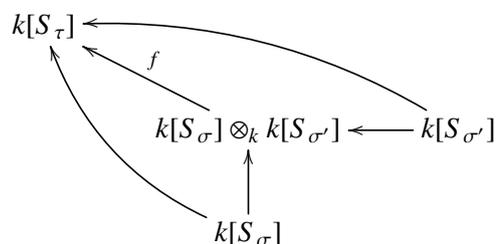
als Vereinigung offener Mengen offen. \square

Lemma 3.31. *Es seien $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und $\tau = \sigma \cap \sigma'$. Es sei $\Delta_\tau : U_\tau \rightarrow U_\sigma \times U_{\sigma'}$ der eindeutige Morphismus, der von den Inklusionen $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ und $U_\tau \rightarrow U_{\sigma'}$ induziert wird. Dann ist dessen Bild abgeschlossen in $U_\sigma \times U_{\sigma'}$.*

Beweis Δ_τ ist der eindeutige Morphismus, der das Diagramm



kommutieren lässt und kommt daher vom eindeutigen k -Algebrenhomomorphismus $f : k[S_\sigma] \otimes_k k[S_{\sigma'}] \rightarrow k[S_\tau]$, sodass das Diagramm



kommutiert. f lässt sich konkret angeben durch $f(h \otimes g) = h \cdot g$. Wir behaupten, dass f surjektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass jedes Monom χ^u mit $u \in S_\tau$ getroffen wird. Nach Proposition 2.23 (ii) existieren aber $u_1 \in S_\sigma$ und $u_2 \in S_{\sigma'}$ mit $u = u_1 + u_2$. Folglich ist $\chi^u = \chi^{u_1} \cdot \chi^{u_2} = f(\chi^{u_1} \otimes \chi^{u_2})$. Also ist f eine Quotientenabbildung, das heißt es ist $\Delta_\tau(U_\tau) = V(\ker(f))$ tatsächlich eine abgeschlossene Teilmenge von $U_\sigma \times U_{\sigma'}$. \square

Wir erinnern für das nachfolgende Lemma und den anschließenden Beweis der Separiertheit von X_Σ wieder an Proposition A.1, die mehrmals Verwendung findet.

Lemma 3.32. *Es sei $\Delta_\tau : U_\tau \rightarrow U_\sigma \times U_{\sigma'}$ der Morphismus aus Lemma 3.31. Wir fassen nun U_τ beziehungsweise $U_\sigma \times U_{\sigma'}$ als offene Teilmengen von X_Σ beziehungsweise $X_\Sigma \times X_\Sigma$ auf. Es sei $\Delta : X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma \times X_\Sigma$ der Diagonalmorphismus. Wir behaupten: Die Einschränkung $\Delta|_{U_\tau}$ ist ein wohldefinierter Morphismus $U_\tau \rightarrow U_\sigma \times U_{\sigma'}$ und stimmt überein mit Δ_τ .*

Beweis Es ist schlicht zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_\tau & \xrightarrow{\Delta_\tau} & U_\sigma \times U_{\sigma'} \\ i_\tau \downarrow & & \downarrow i_\sigma \times i_{\sigma'} \\ X_\Sigma & \xrightarrow{\Delta} & X_\Sigma \times X_\Sigma \end{array}$$

kommutiert, denn das schließt offenbar die Wohldefiniertheit des Morphismus $\Delta|_{U_\tau} : U_\tau \rightarrow U_\sigma \times U_{\sigma'}$ mit ein. Dabei sind $i_\tau : U_\tau \rightarrow X_\Sigma$, $i_\sigma : U_\sigma \rightarrow X_\Sigma$ und $i_{\sigma'} : U_{\sigma'} \rightarrow X_\Sigma$ die gewöhnlichen Inklusionen. Wir bezeichnen mit $p_1, p_2 : X_\Sigma \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ die beiden Projektionen. Wegen der universellen Eigenschaft des Faserprodukts $X_\Sigma \times X_\Sigma$ genügt es nun zu zeigen:

- (i) $p_1 \circ \Delta \circ i_\tau = p_1 \circ (i_\sigma \times i_{\sigma'}) \circ \Delta_\tau$
- (ii) $p_2 \circ \Delta \circ i_\tau = p_2 \circ (i_\sigma \times i_{\sigma'}) \circ \Delta_\tau$

Wegen der Symmetrie zeigen wir nur (i). Dazu zeigen wir $p_1 \circ \Delta \circ i_\tau = i_\tau = p_1 \circ (i_\sigma \times i_{\sigma'}) \circ \Delta_\tau$. Die Linke Gleichheit gilt wegen $p_1 \circ \Delta = \text{id}_{X_\Sigma}$. Für die rechte betrachten wir zusätzlich die erste Projektion $q_1 : U_\sigma \times U_{\sigma'} \rightarrow U_\sigma$ und das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U_\tau & \xrightarrow{\Delta_\tau} & U_\sigma \times U_{\sigma'} \\ & \searrow & \swarrow q_1 \\ & U_\sigma & \\ & \swarrow i_\tau & \searrow p_1 \\ & X_\Sigma & \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow i_\sigma \times i_{\sigma'} \\ X_\Sigma \times X_\Sigma \\ \downarrow p_1 \\ X_\Sigma \end{array}$$

Per Definition aller involvierten Pfeile kommutieren aber sowohl beide Dreiecke, als auch das Parallelogramm. \square

Proposition 3.33. X_Σ ist separiert.

Beweis Wir müssen zeigen, dass der Diagonalmorphismus $\Delta : X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma \times X_\Sigma$ abgeschlossenes Bild hat. Da X_Σ offen überdeckt wird von den $U_\sigma \times U_{\sigma'}$ mit $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, müssen wir nach nach Lemma 3.30 nur die Abgeschlossenheit von $\Delta(X_\Sigma) \cap (U_\sigma \times U_{\sigma'})$ in $U_\sigma \times U_{\sigma'}$ zeigen. Sei dazu $\tau = \sigma \cap \sigma'$. Wir behaupten:

$$\Delta(X_\Sigma) \cap (U_\sigma \times U_{\sigma'}) = \Delta|_{U_\tau}(U_\tau).$$

Zunächst stellen wir fest, dass wir fertig sind, sobald wir das eingesehen haben: Nach Lemma 3.32 ist $\Delta|_{U_\tau} = \Delta_\tau$, und nach Lemma 3.31 ist das Bild von Δ_τ in $U_\sigma \times U_{\sigma'}$ abgeschlossen. Sei also für die eine Inklusion $y = \Delta(x) \in \Delta(X_\Sigma) \cap (U_\sigma \times U_{\sigma'})$. Wegen $U_\sigma \times U_{\sigma'} = p_1^{-1}(U_\sigma) \cap p_2^{-1}(U_{\sigma'})$ ist dann $x = p_1(\Delta(x)) = p_1(y) \in U_\sigma$ und analog $x \in U_{\sigma'}$, also $x \in U_\sigma \cap U_{\sigma'}$, und letzteres stimmt nach Proposition 3.13 überein mit U_τ . Das zeigt $y = \Delta(x) \in \Delta|_{U_\tau}(U_\tau)$. Für die andere Inklusion sei $y = \Delta(x)$ mit $x \in U_\tau$ gegeben. Wir müssen $y \in U_\sigma \times U_{\sigma'}$ zeigen. Aber es ist wie eben $p_1(y) = p_2(y) = x \in U_\tau$ und damit $y \in p_1^{-1}(U_\tau) \cap p_2^{-1}(U_\tau) = U_\tau \times U_\tau \subseteq U_\sigma \times U_{\sigma'}$. \square

Kapitel 4

Torische Varietäten als Prävarietäten

Wir haben in Kapitel 3 einen volltreuen Funktor $X : (\text{FAN}) \rightarrow (\text{TOV})$ konstruiert und gezeigt, dass er in der Kategorie der normalen und separierten torischen Varietäten landet. Er induziert also einen Funktor $X : (\text{FAN}) \rightarrow (\text{TOV-NS})$. In diesem Kapitel geht es darum, den Beweis der wesentlichen Surjektivität dieses Funktors zu skizzieren. Das ist über beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körpern richtig, und einen Beweis des allgemeinen Falls kann man in [Oda, Chap. 1.5] finden. Der Einfachheit halber arbeiten wir aber von nun an über den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Das hat den Vorteil, dass wir mit der euklidischen Topologie eine weitere Topologie zur Verfügung haben, die uns die Arbeit erleichtert. Da sich so eine Topologie nicht auf Schemata definieren lässt (generische Punkte vertragen sich schlecht mit der Vorstellung von „Punkten in einem Raum“) wechseln wir dazu in die Kategorie der Prävarietäten, in der nur noch abgeschlossene Punkte übrig bleiben. Für die Definition der Kategorie der Prävarietäten, die Kategorienäquivalenz von integralen Schemata von endlichem Typ in diese Kategorie und grundlegende Eigenschaften dieser Äquivalenz verweisen wir auf den Anhang A.2. Die Hauptquelle dieses Kapitels ist [Sch, Chap. 1.3, 3.1–3.2]

4.1 Definition torischer Varietäten als Prävarietäten

Wir müssen zunächst die wesentlichen Begriffe erneut für die Kategorie der Prävarietäten definieren. Man beachte dabei, dass - genauso wie bei affinen Schemata - der Koordinatenring des Produkts zweier affiner Varietäten wieder durch das Tensorprodukt der Koordinatenringe gegeben ist, siehe [Sch, Chap. 1.0 und Proposition 1.A.1]. Ist X ein Schema, so bezeichnet wie im Anhang $X(\mathbb{C})$ die zugehörige Prävarietät. Ist jedoch $V = \text{Spec}(A)$ ein affines Schema, so verwenden wir auch die Bezeichnung $\text{Specm}(A)$. Das zusätzliche „m“ erinnert an „maximales Ideal“, was insofern sinnvoll ist, als dass die maximalen Ideale gerade die abgeschlossenen Punkte eines affinen Schemas sind.

Definition 4.1 (Algebraischer Torus). Ein *algebraischer Torus* ist eine affine Varietät T zusammen mit einem Morphismus $m : T \times T \rightarrow T$, der T zu einer Gruppe macht, so dass T isomorph (als Varietät mit Gruppenstruktur) ist zu $\text{Specm}(\mathbb{C}[M])$ für ein Gitter M . Dabei wird $\text{Specm}(\mathbb{C}[M])$ zur Gruppe über den Morphismus, der auf \mathbb{C} -Algebren gegeben ist durch $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$.

Definition 4.2 (Torische Varietät). Sei T ein Torus. Eine *torische Varietät* ist eine Prävarietät X zusammen mit einer offenen Immersion $T \rightarrow X$, sodass sich die Gruppenstruktur von T ausweitet zu einer Gruppenwirkung $T \times X \rightarrow X$, die zusätzlich ein Morphismus von Prävarietäten ist.

Wichtig in diesem Zusammenhang ist, dass man sämtliche Konstruktionen, die aus einem Fächer eine torische Varietät machen, auch für Prävarietäten durchführen und zeigen kann, dass dies eine torische Varietät ist. Man kann sich nun fragen, ob dieser Funktor wesentlich surjektiv auf normale separierte torische Varietäten (in der Sprache der Prävarietäten) abbildet. Die Antwort ist ja, und

dieses Resultat werden wir hier skizzieren. Um damit unser eigentliches Ziel zu erreichen, nämlich um einzusehen, dass jede normale separierte torische Varietät in der Sprache der Schemata vom Funktor getroffen wird, brauchen wir eine Reduktion:

Proposition 4.3. *Wir nehmen an, jede normale separierte torische Varietät (in der Sprache der Prävarietäten) sei im Bild des Funktors $X : (FAN) \rightarrow (TOV-NS)$. Dann ist dieser Funktor im Schema-sinne wesentlich surjektiv.*

Beweis Sei $T \rightarrow X$ eine normale separierte torische Varietät in der Sprache der Schemata. Wir skizzieren nun, dass dann $T(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ eine torische Varietät ist. Zunächst ist dieser Morphismus eine offene Immersion nach Proposition A.20 (iii). Dass $T(\mathbb{C})$ ein Torus ist und eine Gruppenwirkung auf $X(\mathbb{C})$ induziert, ist eigentlich nur die Kommutativität einiger Diagramme. Die Morphismus bekommen wir direkt von der Kategorienäquivalenz geliefert, und die Kommutativität der induzierten Diagramme folgt aus der Funktorialität. Damit das zielführend ist, müssen sich die unterliegenden Mengen von $T(\mathbb{C}) \times T(\mathbb{C})$ und $T(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$ natürlich als mengentheoretische Produkte herausstellen. Das ist richtig, und eine Ausführung dazu findet sich in [Bru, Lemma 1.16]. Aus dem gleichen Grund setzt die Wirkung $T(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ die Multiplikation $T(\mathbb{C}) \times T(\mathbb{C}) \rightarrow T(\mathbb{C})$ fort.

Die torische Varietät $T(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ ist außerdem normal und separiert nach A.20 (i) und (ii). Nach Annahme gibt es also einen Fächer Σ mit $X(\mathbb{C}) \cong X_\Sigma$. Das bedeutet $X(\mathbb{C}) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$, $U_\sigma \cap U_{\sigma'} = U_{\sigma \cap \sigma'}$ und, dass die Inklusion $U_{\sigma \cap \sigma'} \rightarrow U_\sigma$ von der Inklusion der Koordinatenringe induziert ist. Nach Proposition A.20 (iv) folgt dann aber auch $X \cong X_\Sigma$, denn ein Schema ist bis auf Isomorphie durch seine affine offene Überdeckung, die paarweisen Schnitte dieser Überdeckung und die Inklusionsmorphisme bestimmt. \square

4.2 Wesentliche Surjektivität im affinen Fall

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass jede normale affine torische Varietät von einem Kegel kommt, also von der Form U_σ ist. Dazu benötigen wir einige Lemmata.

Wir arbeiten von nun an im dualen Gitter M , da wir die nachfolgenden Lemmata genau dafür anwenden werden (die Aussagen verwenden jedoch nur, dass M ein Gitter ist, das duale Gitter N spielt keine Rolle). Wir erinnern daran, dass wir zu unserem dualen Gitter M eine Erweiterung zu einem \mathbb{R} -Vektorraum $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ definiert hatten, in den wir M einbetten konnten. Wir setzen nun $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ und finden analog zum Fall $M_{\mathbb{R}}$ nach Wahl einer Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von M einen Isomorphismus $M_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}^n$, der auf den Tensoren gegeben ist durch $(\sum \lambda_i b_i) \otimes q \mapsto q \sum \lambda_i e_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}$). Wie zuvor betten wir M in $M_{\mathbb{Q}}$ ein durch $m \mapsto m \otimes 1$ und identifizieren M vermöge dieser Einbettung mit seinem Bild, das heißt wir schreiben $m \otimes 1 = m$. Offenbar kommutiert das durch die Basiswahl gegebene Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & M_{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Q}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array} .$$

Lemma 4.4. *Es sei $A \in M^{n \times s}(\mathbb{Q})$, $b \in \mathbb{Q}^n$. Wir betrachten das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ als Gleichungssystem über den reellen Zahlen. Wir gehen davon aus, dass der Lösungsraum $L_{A,b}$ nichtleer ist. Dann ist er von der Form*

$$L_{A,b} = p + \langle u_{r+1}, \dots, u_s \rangle,$$

wobei $r \leq s$ und mit $p, u_j \in \mathbb{Q}^s$.

Beweis Wir bringen das Gleichungssystem in Stufennormalform und können dabei auch problemlos die Spalten tauschen:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{r,s} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da alle Einträge der Matrix und des Zielvektors mit Hilfe des Gauß-Verfahrens aus rationalen Zahlen gewonnen wurden, sind sie wieder rational. Wir setzen $p = (p_1, \dots, p_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Q}^s$ und $u_j = (\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{r,j}, -\delta_{r+1,j}, \dots, -\delta_{s,j}) \in \mathbb{Q}^s$ für alle $j \in \{r+1, \dots, s\}$ und wissen aus der Theorie der linearen Gleichungssysteme, dass die Lösungsmenge tatsächlich gegeben ist durch $L_{A,b} = p + \langle u_{r+1}, \dots, u_s \rangle$, siehe auch [Bos, §3.5]. \square

Lemma 4.5. Sei $\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_s)$ ein Kegel, wobei $v_i \in M$. Dann folgt

$$\sigma \cap M_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \right\}$$

Beweis Ohne Einschränkung können wir $M = \mathbb{Z}^n$ annehmen, also insbesondere $v_i \in \mathbb{Z}^n$. Die Inklusion von rechts nach links ist klar. Sei also $v \in \sigma \cap \mathbb{Q}^n$, das heißt $v = \sum_{i=1}^s \lambda_i^{(0)} v_i$ mit $\lambda_i^{(0)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $v \in \mathbb{Q}^n$. Wir müssen zeigen, dass wir stattdessen andere Koeffizienten für v wählen können, die in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ liegen. Ohne Einschränkung sei $\lambda_i^{(0)} \neq 0$ für alle i , denn andernfalls zeigen wir die Behauptung einfach für $v \in \text{Cone}(v_j \mid j \neq i) \cap \mathbb{Q}^n$. Schreiben wir $v_i = (v_i^{(1)}, \dots, v_i^{(n)})$ und $v = (q_1, \dots, q_n)$ so folgt (gemäß der üblichen Konvention, Vektoren in Matrixprodukten als Spaltenvektoren zu schreiben):

$$A \cdot \lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & \dots & v_s^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n)} & \dots & v_s^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0)} \\ \vdots \\ \lambda_s^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = v,$$

wobei wir A und $\lambda^{(0)}$ auf die naheliegendste Weise definieren. Wir möchten die Existenz einer Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^s$ des Gleichungssystems $A \cdot x = v$ zeigen. Nach Lemma 4.4 ist die Lösungsmenge von der Gestalt $p + \langle u_{r+1}, \dots, u_s \rangle$ mit rationalen u_j und rationalem p . Nun ist eine Fallunterscheidung angebracht: verschwindet bereits jedes u_j , so hat das Gleichungssystem nur eine einzige Lösung p , und da $\lambda^{(0)}$ das Gleichungssystem ebenfalls löst, folgt $p = \lambda^{(0)}$. Wegen $p \in \mathbb{Q}^s$ und $\lambda^{(0)} \geq 0$ folgt die Behauptung.

Interessanter ist der Fall $u_j \neq 0$ für ein j . Die Lösungen des Gleichungssystems sind gegeben durch alle Vektoren der Gestalt

$$p + a_{r+1}u_{r+1} + \dots + a_s u_s, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Die Idee ist nun, die speziellen Koeffizienten $a_{r+1}^{(0)}, \dots, a_s^{(0)}$, die zur Lösung $\lambda^{(0)}$ führen, so behutsam abzuändern, dass das Ergebnis in $\mathbb{Q}_{\geq 0}^s$ liegt.

Sei dazu $\epsilon > 0$ gegeben, welches $\lambda_i^{(0)} > \epsilon$ für alle i erfüllt. Das existiert, da nach Annahme kein $\lambda_i^{(0)}$ verschwindet. Wir definieren

$$M := \max \{ \|u_{r+1}\|_{\infty}, \dots, \|u_s\|_{\infty} \},$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm bezeichne. Dann ist $M \neq 0$, da $u_i \neq 0$ für ein i . Für jedes $i \in \{r+1, \dots, s\}$ wählen wir außerdem $\delta_i \geq 0$ mit $|\delta_i| < \frac{\epsilon}{(s-r)M}$ und so, dass zusätzlich $a_i := a_i^{(0)} + \delta_i \in \mathbb{Q}$. Letzteres ist möglich, da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen. Nun setzen wir

$$\lambda = p + a_{r+1}u_{r+1} + \dots + a_s u_s.$$

Nach Konstruktion ist $\lambda \in \mathbb{Q}^s$ und es löst das Gleichungssystem. Es bleibt nur noch $\lambda \geq 0$ zu zeigen. Offenbar genügt es dazu, $\|\lambda - \lambda^{(0)}\|_\infty < \epsilon$ zu nachzuweisen:

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda^{(0)}\|_\infty &= \|\delta_{r+1}u_{r+1} + \dots + \delta_s u_s\|_\infty \\ &\leq |\delta_{r+1}| \cdot \|u_{r+1}\|_\infty + \dots + |\delta_s| \cdot \|u_s\|_\infty \\ &\leq (|\delta_{r+1}| + \dots + |\delta_s|) \cdot M \\ &< (s-r) \cdot \frac{\epsilon}{(s-r)M} \cdot M \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

also das, was zu zeigen war. \square

Wir erinnern daran, dass ein affines Monoid S ein endlich erzeugtes Monoid zusammen mit einer Monoideinbettung $S \rightarrow M$ ist.

Definition 4.6 (Gesättigtes affines Monoid). Ein affines Monoid $S \subseteq M$ heißt *gesättigt*, falls aus $m \in M$ und $km \in S$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bereits $m \in S$ folgt.

Lemma 4.7. *Es sei $\mathcal{A} \subseteq M$ eine endliche Menge. Dann ist das affine Monoid $\mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq M$ genau dann gesättigt, wenn $\mathbb{N}\mathcal{A} = \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap M$.*

Beweis Ohne Einschränkung sei wieder $M = \mathbb{Z}^n$. Dann ist $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_s\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Sei $\mathbb{N}\mathcal{A}$ gesättigt. Offenbar ist immer $\mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}^n$. Sei für die andere Inklusion $v \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}^n$ gegeben. Insbesondere ist $v \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Q}^n$, weswegen es nach Lemma 4.5 Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gibt mit $v = \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i$. Ist $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ der Hauptnenner der Koeffizienten λ_i , so ist offenbar $kv \in \mathbb{N}\mathcal{A}$. Da $\mathbb{N}\mathcal{A}$ gesättigt ist, folgt die Behauptung $v \in \mathbb{N}\mathcal{A}$.

Sei für die andere Richtung $\mathbb{N}\mathcal{A} = \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}^n$. Wir geben uns $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $m \in \mathbb{Z}^n$ vor mit $km \in \mathbb{N}\mathcal{A}$. Dann ist $km \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}^n$. Offenbar ist dann auch $m = \frac{1}{k} \cdot km \in \text{Cone}(\mathcal{A})$. Da sowieso $m \in \mathbb{Z}^n$ ist, folgt $m \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{N}\mathcal{A}$, das heißt $\mathbb{N}\mathcal{A}$ ist gesättigt. \square

Lemma 4.8. *Es sei $\mathcal{A} \subseteq M$ endlich. Dann folgt*

$$\text{rank}(\mathbb{Z}\mathcal{A}) = \dim(\text{span}(\mathcal{A})) = \dim(\text{Cone}(\mathcal{A})),$$

wobei $\text{rank}(\cdot)$ einem Gitter die Anzahl der Basiselemente zuweist.

Beweis Ohne Einschränkung sei auch hier $M = \mathbb{Z}^n$. Wir zeigen zunächst die linke Gleichheit. Sei $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Gitterbasis von $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ (Die existiert nach Lemma 3.25). Wir wollen zeigen, dass es auch eine Basis von $\text{span}(\mathcal{A})$ ist. Man sieht leicht, dass $\{b_1, \dots, b_k\}$ den Raum $\text{span}(\mathcal{A})$ erzeugt.

Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit über \mathbb{R} . Dazu schreiben wir $b_i = (b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(n)})$. Wir müssen zeigen, dass die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} & \dots & b_k^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{(n)} & \dots & b_k^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Nullvektor ist. Da das System homogen ist, ist die Lösungsmenge von der Form $\langle u_{r+1}, \dots, u_s \rangle$ mit nach Lemma 4.4 rationalen Vektoren u_j . Würde nun einer der Vektoren u_j nicht verschwinden, so könnten wir durch skalieren mit dem Hauptnenner seiner Einträge erreichen, dass ein ganzzahliger, nicht verschwindender Vektor das Gleichungssystem löst. Das widerspricht aber der linearen Unabhängigkeit von $\{b_1, \dots, b_k\}$ über \mathbb{Z} . Also verschwinden alle u_j , womit gezeigt ist, dass die b_i auch über \mathbb{R} linear unabhängig sind.

Wir zeigen nun die zweite Gleichheit. Dafür können wir sogar die Annahme $\mathcal{A} \subseteq M$ fallen lassen, wenn wir das möchten. Zunächst ist per Definition $\dim(\text{Cone}(\mathcal{A})) = \dim(\text{span}(\text{Cone}(\mathcal{A})))$. Wir sind also fertig, wenn wir $\text{span}(\mathcal{A}) = \text{span}(\text{Cone}(\mathcal{A}))$ zeigen können. Die Inklusion von links nach rechts folgt daraus, dass der $\text{span}(\cdot)$ -Operator Inklusionen erhält, und die von rechts nach links folgt aus $\text{Cone}(\mathcal{A}) \subseteq \text{span}(\mathcal{A})$ und der Tatsache, dass der $\text{span}(\cdot)$ -Operator außerdem idempotent ist. \square

Lemma 4.9. *Sei $S \subseteq M$ ein gesättigtes affines Monoid mit $\mathbb{Z}S = M$. Dann ist $S = S_\sigma$ für einen strikt konvexen rationalen Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$.*

Beweis Es sei $\mathcal{A} \subseteq S$ eine endliche erzeugende Menge von S , das heißt $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$. Wegen $n = \text{rank}(M) = \text{rank}(\mathbb{Z}S) = \text{rank}(\mathbb{Z}\mathcal{A})$ folgt mit Lemma 4.8: $\dim(\text{Cone}(\mathcal{A})) = n$. Wir definieren $\sigma = \text{Cone}(\mathcal{A})^\vee$. σ ist rational nach Lemma 2.17 und außerdem strikt konvex nach Proposition 2.24 (iv), denn der duale Kegel zu σ ist nach dem Dualitätstheorem 2.3 gerade $\text{Cone}(\mathcal{A})$ selbst. Wir müssen noch $S = S_\sigma$ zeigen. Das ist gleichbedeutend zu

$$\mathbb{N}\mathcal{A} = \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap M$$

und folgt, da S gesättigt ist, aus Lemma 4.7. \square

Lemma 4.10 (Hilbert's Nullstellensatz). *Sei K ein Körper und A eine endlich erzeugte K -Algebra. Dann folgt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$:*

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{m},$$

wobei der Schnitt über alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}$ gebildet wird.

Beweis Siehe [Wed, Theorem 1.7]. \square

Proposition 4.11. *Es sei $T \rightarrow V$ eine affine torische Varietät. Der Morphismus komme von einem k -Algebrenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[M]$, wobei $\mathbb{C}[V]$ den Koordinatenring von V bezeichnet. Dann ist φ injektiv und ein Isomorphismus auf $\mathbb{C}[S]$ für ein affines Monoid $S \subseteq M$. Weiter gilt $\mathbb{Z}S = M$.*

Beweis Wir müssen $\varphi^{-1}(0) = (0)$ zeigen. Offenbar ist $\varphi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \in T$ und folglich $\varphi^{-1}(0) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \in T} \varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = \varphi^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{m} \in T} \mathfrak{m}) = \varphi^{-1}(0)$. Ersteres liegt offen und dicht in V und letzteres ist abgeschlossen. Also folgt $V(\varphi^{-1}(0)) = V$ und damit

$$\varphi^{-1}(0) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \in V} \mathfrak{m} = (0)$$

nach dem hilbertschen Nullstellensatz 4.10. Das zeigt die Injektivität.

Wir definieren nun $S = \{m \in M \mid \chi^m \in \varphi(\mathbb{C}[V])\}$. Offenbar ist S ein Monoid und $\mathbb{C}[S] \subseteq \varphi(\mathbb{C}[V])$. Die Gleichheit zu zeigen ist ein nichttriviales Unterfangen, das es erfordert eine Charaktertheorie algebraischer Tori (in der Kategorie der Prävarietäten) zu entwickeln. Ein Beweis kann gefunden werden in [Sch, Theorem 1.1.17].

Wir zeigen noch, dass S endlich erzeugt ist: Da $\mathbb{C}[V]$ Koordinatenring einer affinen Varietät ist, gibt es Elemente $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[V]$ mit $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_k]$. Es folgt $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_k)]$.

Jedes der Polynome $\varphi(f_i)$ lässt sich nun in endlich viele Monome χ^m mit $m \in S$ zerlegen, wodurch sich eine Darstellung $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$ mit $s \geq k$ finden lässt. Dann folgt aber unmittelbar $S = \mathbb{N}\{m_1, \dots, m_s\}$, das heißt S ist endlich erzeugt und damit affin. Ein Beweis der Behauptung $\mathbb{Z}S = M$ findet sich in [Sch, Proposition 1.1.14] \square

Die Proposition bedeutet, dass wir uns bei der Beschreibung affiner torischer Varietäten $T \rightarrow V$ auf den Fall beschränken können, dass $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S])$ mit einem affinen Monoid $S \subseteq M$, welches M erzeugt und so, dass $T \rightarrow V$ von der Inklusion $\mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}[M]$ induziert wird. Wir wollen zeigen, dass für normales V tatsächlich $S = S_\sigma$ für einen Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ist.

Lemma 4.12. *Es sei X eine Prävarietät, Y eine separierte Prävarietät und $f, g : X \rightarrow Y$ Morphismen, die auf einer dichten Teilmenge von X übereinstimmen. Dann ist $f = g$.*

Beweis Es sei A die Menge der Elemente von X , auf denen f und g den gleichen Wert annehmen. Wir müssen $A = X$ zeigen. Da A dicht ist, genügt es zu sehen, dass A abgeschlossen ist. Wir betrachten den von der universellen Eigenschaft des Produkts $Y \times Y$ induzierten Morphismus $[f, g] : X \rightarrow Y \times Y$, $x \mapsto (f(x), g(x))$. Sei $\Delta \subseteq Y \times Y$ die Diagonale. Δ ist aufgrund der Separiertheit von Y abgeschlossen, und damit auch $A = [f, g]^{-1}(\Delta)$. \square

Proposition 4.13. *Es sei $T \rightarrow V$ eine normale affine torische Varietät. Dann ist $V \cong U_\sigma$ für einen strikt konvexen rationalen Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$.*

Beweis Nach Proposition 4.11 ist ohne Einschränkung $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S])$ für ein affines Monoid $S \subseteq M$ mit $\mathbb{Z}S = M$. Wir müssen unter anderem zeigen, dass es einen strikt konvexen rationalen Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ gibt mit $S_\sigma = S$. Nach Lemma 4.9 genügt es dazu zu zeigen, dass S gesättigt ist. Sei also $m \in M$, $k \geq 1$ und $km \in S$. χ^m ist als Element des Koordinatenrings $\mathbb{C}[M]$ eine reguläre Funktion auf T . Da $T \subseteq V$ offen ist, ist also χ^m eine rationale Funktion auf V , also Element des Quotientenkörpers $\text{Quot}(\mathbb{C}[S])$ (Siehe auch [Har, Theorem 3.2d]). Da χ^m außerdem Nullstelle des normierten Polynoms $X^k - \chi^{km} \in \mathbb{C}[S][X]$ ist, ist es ganz über $\mathbb{C}[S]$. Nun ist wegen der Normalität von V der Ring $\mathbb{C}[S]$ nach Proposition A.9 und A.10 ein ganzabgeschlossener Integritätsring. Folglich ist $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$, was sofort $m \in S$ impliziert, das heißt S ist gesättigt.

Um zu zeigen, dass die Gleichheit $V = U_\sigma$ (die wir bisher nur in der Kategorie der Prävarietäten gezeigt haben) auch eine Gleichheit torischer Varietäten ist, müssen wir zeigen: Es gibt nur eine einzige Wirkung von T auf U_σ , die die Wirkung von T auf sich selbst fortsetzt. Nun ist T aber eine offene Teilmenge der irreduziblen Varietät U_σ und damit dicht, also ist $T \times T$ eine dichte Teilmenge von $T \times U_\sigma$. Eine Wirkung von T auf U_σ ist ein Morphismus $T \times U_\sigma \rightarrow U_\sigma$, der auf der dichten Teilmenge $T \times T$ bereits festgelegt ist. Zusammen mit der Separiertheit von U_σ , die für jede affine Varietät erfüllt ist, und Lemma 4.12 folgt die Behauptung. \square

4.3 Orbits, Seiten und offene Immersionen

Wir formulieren hier die wichtigsten Aussagen über Torusorbits, die wir benötigen. Sei dazu $T \rightarrow X_\Sigma$ die torische Varietät eines Fächers Σ in $N_{\mathbb{R}}$. Per Definition gibt es eine Gruppenwirkung $T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ von T auf X_Σ . Wie bei jeder Gruppenwirkung zerfällt X_Σ disjunkt in Orbits, also Teilmengen, die sich jeweils als Translate eines einzelnen Elements aus X_Σ realisieren lassen. Wir werden die Orbit-Kegel-Korrespondenz formulieren, ohne die genaue Konstruktion anzugeben. Sie bringt Kegel in Σ mit Orbits in X_Σ in Verbindung. Genauer gilt:

Proposition 4.14. *Sei X_Σ die torische Varietät des Fächers Σ . Dann folgt:*

(i) Es gibt eine Bijektion

$$\{\text{Kegel in } \Sigma\} \rightarrow \{\text{Orbits der Gruppenwirkung } T \times X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma\}$$

$$\sigma \mapsto \mathcal{O}(\sigma)$$

(ii) Jede affine offene Teilmenge U_σ ist die Vereinigung von Orbits

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} \mathcal{O}(\tau)$$

(iii) Es ist $\tau \leq \sigma$ genau dann wenn $\mathcal{O}(\sigma) \subseteq \overline{\mathcal{O}(\tau)}$ und es gilt

$$\overline{\mathcal{O}(\tau)} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} \mathcal{O}(\sigma)$$

(iv) Wir definieren $\mathfrak{p}(\sigma) = \mathbb{C}\langle \chi^m \mid m \in S_\sigma \setminus (\sigma^\perp \cap M) \rangle$. Dann ist $\mathfrak{p}(\sigma)$ ein Primideal in $\mathbb{C}[S_\sigma]$, und der von der Quotientenabbildung induzierte Morphismus $\text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma]/\mathfrak{p}(\sigma)) \rightarrow U_\sigma$ ist eine Bijektion auf $\mathcal{O}(\sigma)$

Beweis Siehe [Sch, Theorem 3.2.6]. □

Man beachte, dass diese Proposition natürlich insbesondere für Fächer der Form $\Sigma = \Sigma(\sigma)$ aus Proposition 3.7 anwendbar sind, wodurch wir eine Korrespondenz zwischen Seiten von σ und Orbits in U_σ erhalten, auch wenn U_σ nicht eingebettet ist in eine größere torische Varietät.

Proposition 4.15. Es seien $\tau \subseteq \sigma$ Kegel in $N_{\mathbb{R}}$, wobei nicht notwendig τ eine Seite von σ ist. Dann induziert die Inklusion $\tau \subseteq \sigma$ einen Morphismus $g : U_\tau \rightarrow U_\sigma$, der invariant unter der Toruswirkung ist, das heißt es ist $g(t \cdot u) = t \cdot g(u)$ für $t \in T$ und $u \in U_\tau$.

Beweis Wir erhalten wie im Fall, dass τ eine Seite von σ ist, eine Inklusion $S_\sigma \rightarrow S_\tau$, die einen \mathbb{C} -Algebrenhomomorphismus $\mathbb{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$ induziert, und die Invarianz unter der Toruswirkung ergibt sich wieder unmittelbar aus der Kommutativität des entsprechenden Diagramms von \mathbb{C} -Algebren. □

Die Beweisidee des folgenden Lemmas und der nachfolgenden Proposition stammt aus [Oda, Chap. 1.5.4].

Lemma 4.16. Seien $\tau \subseteq \sigma$ zwei Kegel, sodass τ in keiner echten Seite von σ enthalten ist. Dann gilt:

(i) $\tau \cap \text{Relint}(\sigma) \neq \emptyset$

(ii) $\mathbb{C}[S_\tau]\mathfrak{p}(\sigma)$ ist ein echtes Ideal in $\mathbb{C}[S_\tau]$

Beweis

(i) Es sei $\tau = \text{Cone}(v_1, \dots, v_s)$ und $n := \sum_{i=1}^s v_i$. Wir behaupten $n \in \text{Relint}(\sigma)$.

Angenommen nicht. Dann gibt es wegen Proposition 2.13 (ii) eine echte Seite $\tau' \leq \sigma$ mit $n \in \tau'$. Zu τ' existiert ein $u \in \sigma^\vee$ mit $\tau' = \sigma \cap u^\perp$. Wir erhalten

$$0 = (u, n) = \sum_{i=1}^s (u, v_i)$$

Wegen $u \in \sigma^\vee$ und $\tau \subseteq \sigma$ ist $(u, v_i) \geq 0$ und folglich sogar $(u, v_i) = 0$ für alle i . Man folgert hieraus leicht $\tau \subseteq \tau'$, im Widerspruch dazu, dass τ in keiner echten Seite von σ enthalten ist. □

- (ii) Wir müssen zeigen, dass $1 \notin \mathbb{C}[S_\tau]\mathfrak{p}(\sigma)$. Man führt das leicht darauf zurück, dass für $\chi^m \in \mathbb{C}[S_\tau]$ und $\chi^{m'} \in \mathfrak{p}(\sigma)$ das Produkt $\chi^{m+m'}$ nicht 1 ist. Äquivalent ist zu zeigen, dass für $m \in S_\tau$ und $m' \in S_\sigma \setminus (\sigma^\perp \cap M)$ gilt: $m+m' \neq 0$. Wir fixieren uns ein nach (i) existentes $n \in \tau \cap \text{Relint}(\sigma)$. Wir bemerken, dass dann nach dem Beweis von Proposition 2.16 (i) $\sigma^\vee \cap n^\perp$ die kleinste Seite von σ^\vee ist, also nach (iii) der gleichen Proposition gegeben ist durch $\sigma^\vee \cap n^\perp = \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee) = \sigma^\perp$. Angenommen, es wäre doch $m+m' = 0$. Dann wäre $m' = -m \in S_\sigma \cap (-S_\tau) \subseteq \tau^\perp \subseteq n^\perp$. Dann wäre $m' \in \sigma^\vee \cap n^\perp = \sigma^\perp$, im Widerspruch zur Annahme. \square

Proposition 4.17. *Es seien $\tau \subseteq \sigma$ zwei Kegel, sodass der induzierte Morphismus von Varietäten $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ eine offene Einbettung ist. Dann ist τ eine Seite von σ .*

Beweis Es sei σ' die kleinste Seite von σ , die τ enthält. Da sich die Eigenschaft, eine offene Einbettung zu sein, offenbar auf den Morphismus $U_\tau \rightarrow U_{\sigma'}$ überträgt, können wir ohne Einschränkung $\sigma = \sigma'$ annehmen und müssen $\tau = \sigma$ zeigen. Wir bemerken, dass τ in keiner echten Seite von σ enthalten ist, sodass später Lemma 4.16 zum Einsatz kommen kann.

Wir identifizieren im folgenden U_τ mit seinem Bild in U_σ . Angenommen, wir können $U_\tau = U_\sigma$ zeigen. Das hätte $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]$, also $S_\tau = S_\sigma$ zur Folge. Da es nach dem Beweis von Gordan's Lemma 2.19 Erzeuger von τ^\vee bzw. σ^\vee gibt, die S_τ bzw. S_σ als Monoide erzeugen, folgte daraus $\tau^\vee = \sigma^\vee$ und damit $\sigma = (\sigma^\vee)^\vee = (\tau^\vee)^\vee = \tau$ und wir wären fertig.

Wir zeigen zunächst, dass der Orbit $O(\sigma)$ bereits ganz in U_τ enthalten ist. Da U_τ nach Proposition 4.15 stabil unter der Toruswirkung ist, genügt es $O(\sigma) \cap U_\tau \neq \emptyset$ zu zeigen. Dazu betrachten wir das (offenbar wohldefinierte) kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[S_\sigma] & \longrightarrow & \mathbb{C}[S_\tau] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[S_\sigma]/\mathfrak{p}(\sigma) & \longrightarrow & \mathbb{C}[S_\tau]/(\mathbb{C}[S_\tau]\mathfrak{p}(\sigma)). \end{array}$$

Dies induziert umgekehrt ein kommutatives Diagramm von Varietäten

$$\begin{array}{ccc} U_\sigma & \longleftarrow & U_\tau \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\tau]/\mathfrak{p}(\sigma)) & \longleftarrow & \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\tau]/(\mathbb{C}[S_\tau]\mathfrak{p}(\sigma))). \end{array}$$

Da der linke Pfeil nach Theorem 4.14 (iv) eine Bijektion auf $O(\sigma)$ ist, genügt es – um $O(\sigma) \cap U_\tau \neq \emptyset$ zu sehen – zu zeigen, dass $\text{Specm}(\mathbb{C}[S_\tau]/(\mathbb{C}[S_\tau]\mathfrak{p}(\sigma))) \neq \emptyset$. Das folgt aber aus Lemma 4.16 (ii), da $\mathbb{C}[S_\tau]\mathfrak{p}(\sigma)$ ein echtes Ideal in $\mathbb{C}[S_\tau]$ ist.

Folglich haben wir $O(\sigma) \subseteq U_\tau$ gezeigt. Sei nun $O(\tau')$ ein weiterer Orbit von U_σ . Nach Theorem 4.14 (iii) ist $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau')}$, also nach dem eben gezeigten $\overline{O(\tau')} \cap U_\tau \neq \emptyset$. Da U_τ offen ist, folgt nach der Definition des topologischen Abschlusses: $O(\tau') \cap U_\tau \neq \emptyset$. Wie oben folgt aufgrund der Invarianz von U_τ unter der Toruswirkung schon $O(\tau') \subseteq U_\tau$.

Nach Theorem 4.14 (ii) liegt also jeder Orbit von U_σ bereits in U_τ , woraus sich unmittelbar $U_\tau = U_\sigma$ ergibt. \square

4.4 Wesentliche Surjektivität im allgemeinen Fall

In diesem Abschnitt skizzieren wir, dass jede normale, separierte torische Varietät von einem Fächer herrührt. Dazu brauchen wir als Hilfsmittel eine weitere Topologie auf X_Σ , die analytische Topologie. Dazu bemerken wir zunächst, dass jede affine torische Varietät U_σ auf natürliche Weise so eine Topologie trägt: Die \mathbb{C} -Algebra $\mathbb{C}[S_\sigma]$ ist endlich erzeugt, weswegen es einen surjektiven \mathbb{C} -Algebrenhomomorphismus $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma]$ gibt. Es sei I der Kern dieses Homomorphismus. Sei $V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$ die zugehörige algebraische Menge. Dann trägt $V(I)$ nicht nur die Zariski-Topologie, sondern auch die vom euklidischen Raum \mathbb{C}^n induzierte analytische Topologie. Über die Bijektion $U_\sigma \cong V(I)$ (Punkte in $V(I)$ entsprechen maximalen Idealen von $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I \cong \mathbb{C}[S_\sigma]$) ziehen wir diese Topologie auf U_σ zurück. Die Wohldefiniertheit dieser Topologie folgt daraus, dass Isomorphismen affiner Varietäten durch Polynomfunktionen gegeben sind, und solche Funktionen sind stetige Funktionen $\mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^{s'}$ bezüglich der euklidischen Topologie. Die analytische Topologie auf X_Σ erklären wir nun so, dass eine Menge $U \subseteq X_\Sigma$ offen heißt, falls der Schnitt $U \cap U_\sigma$ offen bezüglich der analytischen Topologie in U_σ ist für jedes $\sigma \in \Sigma$. Die X_Σ zugrundeliegende Menge zusammen mit der analytischen Topologie bezeichnen wir als X_Σ^{an} . Dieser topologische Raum ist hausdorffsch, siehe [Sha, Chap. 7.1.1]. Für unsere Zwecke wichtig ist der Zusammenhang von Limiten sogenannter 1-Parameteruntergruppen und Kegeln in einem Fächer. Dazu eine weitere Definition:

Definition 4.18. Sei T ein Torus. Eine 1-Parameteruntergruppe (Abkürzung: 1-PU) ist ein Morphismus $\mathbb{C}^* \rightarrow T$, der gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei $T = (\mathbb{C}^*)^n = \text{Specm}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}) = \text{Specm}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n])$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist durch $\lambda^a : \mathbb{C}^* \rightarrow T$, $t \mapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_n})$ eine 1-PU gegeben. Wir können 1-PUs punktweise multiplizieren und erhalten die Rechenregel $\lambda^a \lambda^b = \lambda^{a+b}$.

Ein Standardresultat ist, dass die Abbildung $a \mapsto \lambda^a$ ein Isomorphismus von \mathbb{Z}^n in die Gruppe der 1-PUs ist. Diese Isomorphie überträgt sich auf beliebige Tori, das heißt: Ist N unser Gitter mit dualem Gitter M , dann ist die Gruppe der 1-PUs des Torus $T = \text{Specm}(\mathbb{C}[M])$ auf natürliche Weise isomorph zu N . Siehe auch [Sch, Chap. 1.1], wo das Gitter N definiert wird als das Gitter von 1-PUs eines algebraischen Torus.

In diesem Abschnitt sei ein Torus T mit Gitter von 1-PUs N fixiert.

Proposition 4.19. Sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel und sei $u \in N$. Wir fassen T als offene Teilmenge von U_σ auf. Dann gilt:

$$u \in \sigma \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) \text{ existiert in } U_\sigma^{\text{an}}$$

Beweis Siehe [Sch, Proposition 3.2.2]. □

Theorem 4.20 (Sumihiro's Theorem). Sei $T \rightarrow X$ eine normale separierte torische Varietät. Dann gibt es eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, sodass jedes U_i invariant unter der Wirkung des Torus T ist.

Beweis Siehe [Sum, Lemma 8]. □

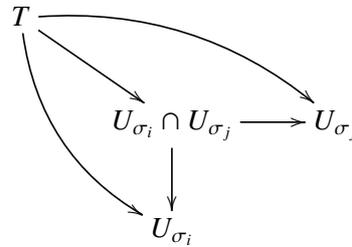
Bemerkung 4.21. Die affinen offenen Teile U_i sind dann selbst normale affine torische Varietäten mit Torus T . Die Gruppenwirkung ist einfach die Wirkung $T \times U_i \rightarrow U_i$, die durch Einschränkung der auf X gegebenen Wirkung entsteht. Man beachte dabei: Fassen wir T als offene Teilmenge von X auf, so hat T mit jedem U_i nichtleeren Schnitt, da X irreduzibel ist. Wegen der Invarianz von U_i unter der Toruswirkung, und weil T offenbar surjektiv auf sich selbst wirkt (schreiben wir $T = U_{\{0\}}$, so wird mit Proposition 4.14 (i) ersichtlich, dass es nur einen Orbit der Wirkung von T auf sich selbst gibt), ist bereits $T \subseteq U_i$. Somit ist erklärt, wie man die offene Immersion $T \rightarrow U_i$ erhält.

Theorem 4.22. *Zu jeder normalen separierten torischen Varietät $T \rightarrow X$ gibt es einen Fächer Σ mit $X \cong X_\Sigma$.*

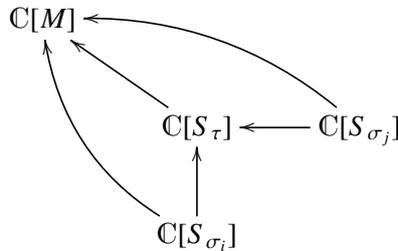
Beweis Sei X eine normale separierte torische Varietät mit Torus $T \cong \text{Specm}(\mathbb{C}[M])$. Nach Sumihiro's Theorem gibt es eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit normalen affinen torischen Varietäten U_i . Da X quasikompakt ist, kann man annehmen, dass die Vereinigung endlich ist, also $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Nach Proposition 4.13 ist jedes U_i von der Form U_{σ_i} für einen Kegel $\sigma_i \subseteq N_{\mathbb{R}}$ und so, dass die Inklusion $\text{Specm}(\mathbb{C}[M]) = T \rightarrow U_{\sigma_i} = \text{Specm}(\mathbb{C}[S_{\sigma_i}])$ einfach von der Inklusion $\mathbb{C}[S_{\sigma_i}] \rightarrow \mathbb{C}[M]$ herrührt.

Nun ist $U_{\sigma_i} \cap U_{\sigma_j}$ nach A.21 auch affin, außerdem offenbar normal und zudem - wie man leicht feststellt - ebenfalls torusinvariant. Es ist also eine normale affine torische Varietät und daher von der Form $U_{\sigma_i} \cap U_{\sigma_j} = U_\tau$ für einen Kegel $\tau \subseteq N_{\mathbb{R}}$. Wir zeigen nun: $\tau = \sigma_i \cap \sigma_j$. Dazu genügt es, $\tau \cap N = \sigma_i \cap \sigma_j \cap N$ zu zeigen. Sei also $u \in N$. Dann folgt mit Proposition 4.19: $u \in \tau$ genau dann, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ in U_τ^{an} existiert. Wegen $U_\tau^{\text{an}} = U_{\sigma_i}^{\text{an}} \cap U_{\sigma_j}^{\text{an}}$, und weil die Topologie von X_Σ^{an} hausdorff ist (Limiten sind dann eindeutig) ist das genau dann der Fall, wenn der Limes in $U_{\sigma_i}^{\text{an}}$ und $U_{\sigma_j}^{\text{an}}$ existiert, also aufgrund der gleichen Proposition genau dann, wenn $u \in \sigma_i$ und $u \in \sigma_j$ ist, also $u \in \sigma_i \cap \sigma_j$.

Wir machen folgende Feststellung: Das folgende Diagramm



kommutiert offensichtlich, denn es besteht nur aus Inklusionen. Folglich kommutiert auch das Diagramm



Also wird der Morphismus $U_\tau \rightarrow U_{\sigma_i}$ wieder von der Inklusion $\mathbb{C}[S_{\sigma_i}] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$ induziert. Das bedeutet nichts anderes, als dass er von der Einbettung $\tau \subseteq \sigma_i$ induziert wird. Zusammen damit, dass er eine offene Einbettung ist, folgt mit Proposition 4.17: τ ist eine Seite von σ_i (und wegen der Symmetrie auch von σ_j). Die σ_i erfüllen also die Schnittbedingung aus Proposition 3.7, weswegen wir den Fächer $\Sigma = \Sigma(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ definieren können. Wir behaupten: $X \cong X_\Sigma$. Dazu konstruieren wir zueinander inverse Morphismen $\varphi : X \rightarrow X_\Sigma$ und $\psi : X_\Sigma \rightarrow X$: Sei V_{σ_i} die zu σ_i gehörige basisoffene Menge in X_Σ . Dann gibt es einen Isomorphismus $U_{\sigma_i} \rightarrow V_{\sigma_i} \rightarrow X_\Sigma$, der auf den Koordinatenringen die Identität ist. Wir definieren $\varphi : X \rightarrow X_\Sigma$ als die Verklebung dieser Morphismen. Dass dies wohldefiniert ist, also auf den Schnitten übereinstimmt, liegt schlicht daran, dass der Morphismus $U_\tau \rightarrow U_{\sigma_i}$ für den Schnitt $\tau = \sigma_i \cap \sigma_j$ von der Einbettung $\mathbb{C}[S_{\sigma_i}] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$ induziert ist, also der Einbettung $V_\tau \rightarrow V_{\sigma_i}$ entspricht.

Umgekehrt definieren wir ψ folgendermaßen: Für einen Kegel $\tau \in \Sigma$ sei σ_i ein Kegel mit $\tau \leq \sigma_i$. Wir definieren dann ψ als die Verklebung der Morphismen $V_\tau \rightarrow V_{\sigma_i} \rightarrow U_{\sigma_i} \rightarrow X$. Genauso wie zuvor sehen wir die Wohldefiniertheit. Offenbar sind dann φ und ψ invers zueinander, denn sie sind es auf den offenen Teilmengen U_{σ_i} beziehungsweise V_{σ_i} . Um zu sehen, dass dies ein Isomorphismus

torischer Varietäten ist, müssen wir wieder einsehen, dass es auf X_Σ nur eine Wirkung des Torus T geben kann, die die Wirkung $T \times T \rightarrow T$ fortsetzt. Das zeigt man aber ganz genauso wie in Proposition 4.13. \square

4.5 Ausblick

Bisher ist in dieser Arbeit nicht mehr geschehen als die Konstruktion einer Kategorienäquivalenz $X : (\text{FAN}) \rightarrow (\text{TOV-NS})$. Folgende Frage ist naheliegend: Wie kann man diese Äquivalenz nutzen, um torische Varietäten zu studieren? Oder präziser: Wenn eine normale separierte torische Varietät X_Σ gegeben ist – wie kann man von kombinatorischen Daten des Fächers Σ auf geometrische Eigenschaften der Varietät X_Σ schließen? In dieser abschließenden Sektion werden wir ohne Beweise zwei Theoreme zitieren, die sich mit solchen Fragen befassen. Dabei bleiben wir in der Kategorie der Prävarietäten.

Definition 4.23 (Glatte und vollständige Fächer). Sei σ ein Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und (N, Σ) ein Fächer.

- (i) σ heißt *glatt*, wenn es ein Erzeugendensystem von σ gibt, das eine Teilmenge einer Basis von N bildet. Der Fächer (N, Σ) heißt *glatt*, wenn jeder seiner Kegel *glatt* ist.
- (ii) Der Fächer (N, Σ) heißt *vollständig*, wenn sein Träger ganz $N_{\mathbb{R}}$ ist, das heißt $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = N_{\mathbb{R}}$.

Definition 4.24 (Glatte und kompakte Varietäten). Sei σ ein Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und (N, Σ) ein Fächer.

- (i) Ein Punkt $p \in U_\sigma$ heißt *glatt*, wenn $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)$ übereinstimmt mit der topologischen Dimension von U_σ . U_σ heißt *glatt*, wenn jeder Punkt von U_σ *glatt* ist und X_Σ heißt *glatt*, wenn jeder affine offene Teil U_τ für $\tau \in \Sigma$ *glatt* ist.
- (ii) Die torische Varietät X_Σ heißt *kompakt*, wenn der analytische Raum X_Σ^{an} kompakt ist.

Theorem 4.25. Sei X_Σ die torische Varietät eines Fächers Σ . Dann gilt:

- (i) X_Σ ist genau dann *glatt*, wenn Σ *glatt* ist.
- (ii) X_Σ ist genau dann *kompakt*, wenn (N, Σ) *vollständig* ist.

Beweis Siehe [Sch, Theorem 3.1.19]. \square

Wir erinnern an die Definition der Fundamentalgruppe eines topologischen Raums X mit Basispunkt $x_0 \in X$: Ihre unterliegende Menge ist die Menge der geschlossenen Kurven von x_0 nach x_0 , wobei zwei solche Kurven identifiziert werden, wenn sie (bei festem Wert x_0 an den Randpunkten des Definitionsbereichs) homotop sind. Die Verknüpfung ist die Konkatenation: Zwei geschlossene Kurven werden verknüpft, indem man sie mit doppelter Geschwindigkeit hintereinander abläuft. Die Bezeichnung der so gewonnenen Fundamentalgruppe, einer wichtigen topologischen Invariante, ist $\pi_1(X, x_0)$. Für allgemeine Betrachtungen zur Fundamentalgruppe verweisen wir auf [Zie, Kapitel II.5]. Die Fundamentalgruppe einer torischen Varietät besitzt eine besonders einfache Beschreibung:

Theorem 4.26. Sei (N, Σ) ein Fächer und N_Σ das Untergitter von N , das von $(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma) \cap N$ aufgespannt wird. Dann folgt für einen beliebigen Basispunkt $x_0 \in X_\Sigma^{\text{an}}$: $\pi_1(X_\Sigma^{\text{an}}, x_0) \cong N/N_\Sigma$.

Beweis Siehe [Sch, Theorem 12.1.10]. \square

Selbstverständlich gibt es viele weitere Anwendungen der Kategorienäquivalenz, die sich beispielsweise mit der Frage beschäftigen, wie man die Struktur der Divisoren auf einer torischen Varietät mit Hilfe des Fächers beschreiben kann, siehe [Sch, Chap. 4]. Wir lassen es aber mit den bisherigen Ergebnissen bewenden und beschließen diese Arbeit mit einem Beispiel:

Beispiel 4.27. Der projektive Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ist glatt, kompakt und hat triviale Fundamentalgruppe.

Beweis Die vorangegangenen Theoreme zeigen, dass wir nur einsehen müssen, dass der Fächer $\Sigma = \Sigma(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ aus Beispiel 3.14 glatt und vollständig ist. Zur Glattheit: Wir müssen zeigen, dass jeder der Kegel $\sigma_i = \text{Cone}(v_j, j \neq i)$ glatt ist. Für $\sigma_0 = \text{Cone}(e_1, \dots, e_n)$ ist das klar, weil die erzeugende Menge offenbar eine Basis von \mathbb{Z}^n ist. Aufgrund der Symmetrie brauchen wir nur noch $\sigma_n = \text{Cone}(-e_1 - \dots - e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$ zu betrachten. Aber dieses Erzeugendensystem ist auch eine Basis von \mathbb{Z}^n , denn ist für gegebene $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ eine Gleichung

$$a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1} + a_n (-e_1 - \dots - e_n) = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

zu lösen, so ist die eindeutige Lösung offenbar gegeben durch $a_n = -b_n$ und $a_i = b_i - b_n$ für $i < n$. Das zeigt, dass Σ glatt ist.

Nun zur Vollständigkeit: Wir müssen zeigen, dass es zu gegebenem $b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n \in \mathbb{R}^n$ ($b_i \in \mathbb{R}$) ein i gibt mit $b \in \sigma_i$. Ist $b_i \geq 0$ für alle i , dann ist $b \in \sigma_0$. Gibt es aber ein i mit $b_i < 0$, so sei j so gewählt, dass b_j am kleinsten ist. Dann ist

$$b = (b_1 - b_j) e_1 + \dots + (b_n - b_j) e_n + (-b_j) (-e_1 - \dots - e_n) \in \sigma_j.$$

Das zeigt die Vollständigkeit. □

Anhang A

Grundlagen der algebraischen Geometrie

A.1 Grundlagen der Schematheorie

Wir wiederholen hier die grundlegenden Bezeichnungen und Ergebnisse aus der Schematheorie, die wir verwenden werden.

Sei A eine kommutative k -Algebra. Zu dieser kann man ein affines Schema $\text{Spec}(A)$ assoziieren: dies steht sowohl für den topologischen Raum $\text{Spec}(A)$, als auch für das Schema $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ mit der dazugehörigen Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$.

Für den Fall, dass A ein Integritätsring ist, ist das Schema $\text{Spec}(A)$ integer und als solches insbesondere irreduzibel (das heißt es ist als topologischer Raum irreduzibel) und reduziert (das heißt jeder Ring $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ ist reduziert) (siehe [Har, Example 3.0.1, Proposition 3.1]).

Die folgende Proposition enthält wichtige Verträglichkeiten des Faserprodukts, die wir in dieser Arbeit häufig verwenden:

Proposition A.1. *Es seien X und Y zwei S -Schemata und $U' \subseteq U \subseteq X$, $V' \subseteq V \subseteq Y$ offene Teilmengen. Es bezeichnen $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$ die beiden Projektionen. Dann gilt:*

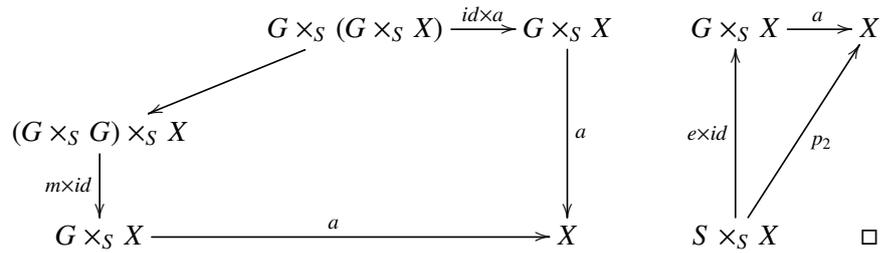
- (i) $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$, zusammen mit den Einschränkungen der Projektionen p_1, p_2 , ist das Faserprodukt $U \times_S V$. Dabei sind die Strukturmorphismen $U, V \rightarrow S$ die Einschränkungen der Strukturmorphismen von X und Y nach S . □
- (ii) Es seien $i : U' \rightarrow U$, $j : V' \rightarrow V$ die Inklusionen. Dann stimmt der kanonische Morphismus $i \times_S j : U' \times_S V' \rightarrow U \times_S V$ überein mit der Inklusion $p_1^{-1}(U') \cap p_2^{-1}(V') \rightarrow p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$. □

Wir benötigen außerdem mehr Flexibilität im Umgang mit Gruppenschemata. Eine mögliche Quelle hierfür ist [Sta, Tag 022L]. Sei dazu G ein Gruppenschema über S . Für jedes Schema V über S bezeichnen wir das neutrale Element von $G(V)$ mit e_V . Offenbar ist die Menge $S(V) = \text{Mor}_S(V, S) = \{*\}$ einelementig. Es bezeichne $e(V) : S(V) \rightarrow G(V)$ die Abbildung $* \mapsto e_V$. Dies ist funktoriell in V , denn ist $f : V \rightarrow V'$ ein Morphismus über S , dann ist $f^* : G(V') \rightarrow G(V)$ ein Gruppenhomomorphismus, erfüllt also insbesondere $f^*(e_{V'}) = e_V$. Aufgrund der Yoneda-Einbettung erhalten wir einen Morphismus $e : S \rightarrow G$ über S . Mit diesen Bezeichnungen können wir eine Charakterisierung von Wirkungen von G auf einem S -Schema X angeben:

Proposition A.2. *Sei G ein Gruppenschema über S mit Multiplikation $m : G \times_S G \rightarrow G$ und X ein Schema über S . Für einen S -Morphismus $a : G \times_S X \rightarrow X$ sind äquivalent:*

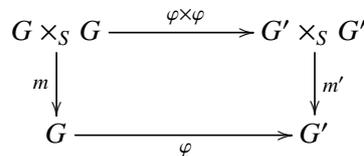
- (i) a ist eine Wirkung von G auf X im Sinne von Definition 1.13

(ii) Die folgenden beiden Diagramme sind kommutativ:



Wir brauchen auch eine weitere Charakterisierung von Morphismen von Gruppenschemata:

Proposition A.3. *Es seien (G, m) , (G', m') Gruppenschemata über S . Ein Morphismus $\varphi : G \rightarrow G'$ ist genau dann ein Morphismus von Gruppenschemata im Sinne von Definition 1.12, wenn das folgende Diagramm kommutiert:*



□

Proposition A.4. *Es sei X ein Schema mit einer offenen, affinen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $I \neq \emptyset$
- (ii) U_i ist integer für jedes i
- (iii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$

Dann ist auch X integer.

Beweis Siehe [Sta, Tag 01OJ].

□

Wir werden hier kurz die Existenz von Verklebungen von Schemata besprechen. Alle Aussagen sind analog für Varietäten oder topologische Räume korrekt, indem man Morphismen von Schemata durch Morphismen von Varietäten beziehungsweise stetige Abbildungen ersetzt.

Proposition A.5. *Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine Familie von Schemata. Ferner seien für jedes Tupel $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ offene Teilmengen $U_{\beta\alpha} \subseteq U_\alpha$ und $U_{\alpha\beta} \subseteq U_\beta$ (zusammen mit der induzierten Unterschemastruktur) und Isomorphismen $g_{\beta\alpha} : U_{\beta\alpha} \rightarrow U_{\alpha\beta}$ gegeben, derart dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ gilt:*

- (i) $U_{\alpha\alpha} = U_\alpha$ und $g_{\alpha\alpha} = id_{U_\alpha}$
- (ii) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$
- (iii) $g_{\beta\alpha}(U_{\beta\alpha} \cap U_{\gamma\alpha}) = U_{\alpha\beta} \cap U_{\gamma\beta}$. Folglich ist $g_{\gamma\beta}$ auf $g_{\beta\alpha}(U_{\beta\alpha} \cap U_{\gamma\alpha})$ definiert; es wird zusätzlich gefordert:
- (iv) $g_{\gamma\beta} \circ g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha}$ auf $U_{\beta\alpha} \cap U_{\gamma\alpha}$.

Dann existiert ein Schema X zusammen mit einer offenen Überdeckung $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ und Isomorphismen von Schemata $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, sodass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ gilt:

(i) $\psi_\alpha(U_{\beta\alpha}) = V_\alpha \cap V_\beta = \psi_\beta(U_{\alpha\beta})$

(ii) $\psi_\alpha = \psi_\beta \circ g_{\beta\alpha}$ auf $U_{\beta\alpha}$

Beweis In [Har, Ex. 2.3.5] wird der Schemafall für den Fall zweier Schemata ausgearbeitet. In [Sch, p. 96-97] geht es um das Verkleben von Varietäten. Das schließt den Fall für topologische Räume konstruktionstechnisch mit ein. Siehe auch [Sta, Tag 01JA] für das Verkleben beliebiger geringter Räume. \square

Beispiel A.6. Sei R ein Ring. Dann ist der n -dimensionale projektive Raum über R gegeben durch $\mathbb{P}_R^n = \text{Proj}(R[X_0, \dots, X_n])$. Dieser besitzt aber auch eine Definition als Verklebung affiner Schemata:

Sei $I = \{0, \dots, n\}$ und $U_i = \text{Spec}\left(R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]\right)$. Wir definieren $U_{j,i} \subseteq U_i$ durch $U_{j,i} = D\left(\frac{X_j}{X_i}\right)$ für $i \neq j$ und $U_{i,i} = U_i$. Wir fassen alle Ringe als Unterringe des Rings $R(X_0, \dots, X_n)$ auf. Die offene Immersion

$$\text{Spec}\left(R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]_{\frac{X_j}{X_i}}\right) \rightarrow U_i$$

induziert dann wegen $R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]_{\frac{X_j}{X_i}} = R\left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{\hat{X}_j}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}\right]_{\frac{X_i}{X_j}}$ einen Verklebemorphismus $g_{j,i} : U_{j,i} \rightarrow U_{i,j}$. Bezüglich diesen verkleben wir die U_i zu einem Schema. Siehe [Wed, Example 13.6] um zu sehen, dass dies wieder der projektive Raum ist.

Für das Studium des Funktors brauchen wir außerdem noch die Definitionen und einfache Eigenschaften von Normalität und Separiertheit eines Schemas.

Definition A.7 (Normale Ringe und Schemata). Ein Ring A heißt *normal*, wenn jeder lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ein ganzabgeschlossener Integritätsring ist. Ein Schema (X, \mathcal{O}_X) heißt *normal*, wenn jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein ganzabgeschlossener Integritätsring ist.

Beispiel A.8. Jeder faktorielle Ring R ist ein ganzabgeschlossener Integritätsring und damit nach der gleich folgenden Proposition A.10 auch normal. Insbesondere trifft das auf Polynomringe $k[X_1, \dots, X_n]$ zu.

Beweis Für den Fall $R = \mathbb{Z}$ findet sich ein Beweis in [Mac, Ex. 5.0]. Dieser Beweis lässt sich identisch für beliebige faktorielle Ringe durchführen. \square

Proposition A.9. Ein affines Schema $\text{Spec}(A)$ ist genau dann normal, wenn A normal ist. Allgemeiner gilt: Ist X ein Schema mit affiner offener Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} \text{Spec}(A_i)$, so ist X genau dann normal, wenn jeder der Ringe A_i normal ist.

Beweis Das folgt unmittelbar aus $A_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}_{\text{Spec}(A), \mathfrak{p}}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$, siehe [Har, Proposition 2.2], und der Tatsache, dass Keime invariant unter Übergang zu kleineren offenen Mengen sind. \square

Proposition A.10. Sei A ein Integritätsring. Ist A ganzabgeschlossen, dann ist auch jede Lokalisierung $S^{-1}A$ an einer multiplikativen Menge S mit $0 \notin S$ ein ganzabgeschlossener Integritätsring. Insbesondere ist A normal. Ist umgekehrt A normal, so ist A ganzabgeschlossen.

Beweis Siehe [Sta, Tag 00GY] für die erste Behauptung und [Mac, Proposition 5.13] für die zweite. \square

Korollar A.11. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} \text{Spec}(A_i)$ eine affine offene Überdeckung des Schemas X . Ist jeder der Ringe A_i ein ganzabgeschlossener Integritätsring, dann ist X normal. \square

Proposition A.12. *Es sei R ein Integritätsring, aufgefasst als Unterring seines Quotientenkörpers K . Es seien $(A_i)_{i \in I}$ Unterringe von R , die alle ganzabgeschlossen sind. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ ganzabgeschlossen.*

Beweis Wir können die Quotientenkörper aller der Ringe A_i und $\bigcap_{i \in I} A_i$ als Teilkörper von K auffassen. Ist nun ein Element $x \in \text{Quot}(\bigcap_{i \in I} A_i)$ ganz über $\bigcap_{i \in I} A_i$, dann ist es auch ganz über jedem A_j . Wegen $\text{Quot}(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \text{Quot}(A_j)$ folgt zusammen mit der Ganzabgeschlossenheit von A_j aber $x \in A_j$, also $x \in \bigcap_{j \in I} A_j$. Somit ist dieser Schnitt ganzabgeschlossen. \square

Definition A.13 (Separiertheit). Es sei $X \rightarrow S$ ein Schema über S . Dann heißt X *separiert* über S , wenn der vom Faserprodukt induzierte Diagonalmorphismus $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ eine abgeschlossene Immersion ist. Äquivalent dazu ist, dass $\Delta_{X/S}$ abgeschlossenes Bild hat.

A.2 Grundlagen in der Theorie der Prävarietäten

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper:

Definition A.14 (Raum mit Funktionen, deren Morphismen).

- (i) Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die Garbe $\text{Map}(\cdot, k)$ durch $\text{Map}(U, k) = \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ ist Funktion}\}$. Ein *Raum mit Funktionen* über k ist ein geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) , sodass \mathcal{O}_X eine Untergarbe von $\text{Map}(\cdot, k)$ ist und sodass $\mathcal{O}_X(U)$ eine k -Unteralgebra von $\text{Map}(U, k)$ ist für jedes U .
- (ii) Ein *Morphismus von Räumen mit Funktionen* X, Y ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$, sodass für alle $V \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt: $g \circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

Irreduzible algebraische Mengen sind zusammen mit ihren regulären Funktionen offenbar Räume mit Funktionen. Wir definieren Prävarietäten als irreduzible Räume mit Funktionen, die lokal aussehen wie irreduzible algebraische Mengen:

Definition A.15 (Affine Varietät, Prävarietät, deren Morphismen).

- (i) Eine *affine Varietät* ist ein Raum mit Funktionen, der als solcher isomorph ist zu einer irreduziblen algebraischen Menge.
- (ii) Eine *Prävarietät* ist ein irreduzibler Raum mit Funktionen (X, \mathcal{O}_X) , zu dem es eine endliche offene Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ gibt, sodass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ eine affine Varietät ist.
- (iii) Ein *Morphismus von Prävarietäten* ist ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.

Man beachte, dass jede Prävarietät quasikompakt ist, denn jede affine Varietät hat bekanntermaßen diese Eigenschaft und endliche Vereinigungen quasikompakter Mengen sind wieder quasikompakt.

Theorem A.16. *Es gibt eine Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie der integren Schemata von endlichem Typ über k und der Kategorie der Prävarietäten.*

Beweis Wir geben hier hauptsächlich die Konstruktion dieses Funktors an und verweisen für die Details des Beweises auf [Wed, Chap. 3, Prevarieties as Schemes]. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein integres Schema vom endlichen Typ über k . Sei $X(k)$ die Menge der abgeschlossenen Punkte von X zusammen mit der induzierten Topologie. Es sei $\alpha : X(k) \rightarrow X$ die Inklusion. Diese ist per Definition der Topologie auf $X(k)$ stetig, also wird $X(k)$ zum geringsten Raum mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X(k)} := \alpha^{-1}\mathcal{O}_X$. Wir müssen diese Garbe als Garbe von Funktionen auffassen, um eine Prävarietät zu erhalten. Der Teilraum $X(k)$

ist sehr dicht in X , das heißt die Abbildung $U \mapsto U \cap X(k)$ ist eine Bijektion von der Topologie von X in die Topologie von $X(k)$. Man folgert daraus leicht, dass U die kleinste offene Menge von X ist, die $U \cap X(k)$ enthält. Per Definition von $\mathcal{O}_{X(k)}(U \cap X(k))$ als direktem Limes über alle $\mathcal{O}_X(V)$ mit offenem $V \subseteq X$, das $U \cap X(k)$ enthält, erhält man also:

$$\mathcal{O}_{X(k)}(U \cap X(k)) = \mathcal{O}_X(U).$$

Sei π_x^U für $x \in U \cap X(k)$ die Hintereinanderausführung der natürlichen Abbildungen $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x) \cong k$. Wir definieren dann den Funktionswert von $f \in \mathcal{O}_{X(k)}(U \cap X(k))$ in dem Punkt x als $f(x) := \pi_x^U(f)$. Man kann zeigen, dass $(X(k), \mathcal{O}_{X(k)})$ mit dieser Definition zur Prävarietät wird. Somit haben wir die Objektabbildung des Funktors also mittels $(X, \mathcal{O}_X) \mapsto (X(k), \mathcal{O}_{X(k)})$ erklärt.

Nun zu den Morphismen: sind X und Y integrale Schemata vom endlichen Typ über k und ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata über k , so ist die Einschränkung $f| : X(k) \rightarrow Y(k)$ wohldefiniert. Für $U \cap Y(k)$ offen in $Y(k)$ ist $f|^{-1}(U \cap Y(k)) = f^{-1}(U) \cap X(k)$, weswegen es zu zeigen gilt, dass das Zurückziehen von Funktionen

$$\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

wohldefiniert ist. Hier haben wir aber bereits eine wohldefinierte Abbildung, nämlich $f_U^\#$, und man zeigt von dieser leicht, dass sie wirklich Funktionen zurückzieht. Damit ist die Morphismenabbildung erklärt. Man kann nun zeigen, dass dies tatsächlich eine Kategorienäquivalenz ist, beispielsweise indem man einen quasiinversen Funktor angibt. \square

In der Kategorie der Prävarietäten gibt es endliche Produkte, und sie stimmen über die obige Kategorienäquivalenz überein mit Faserprodukten von integren Schemata über k , siehe [Wed, p. 103f]. Wir können Separiertheit daher auch für Prävarietäten definieren:

Definition A.17 (Separiertheit von Prävarietäten). Eine Prävarietät X heißt *separiert*, wenn der Diagonalmorphismus $\Delta : X \rightarrow X \times X$ (induziert vom Diagonalenmorphismus des zugehörigen integren Schemas über k) abgeschlossenes Bild hat.

Definition A.18 (Normale Prävarietät). Eine Prävarietät X heißt *normal*, wenn jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ normal ist.

Definition A.19 (Offene Immersion). Ein Morphismus $X \rightarrow Y$ zwischen Prävarietäten heißt *offene Immersion*, wenn er einen Isomorphismus $X \rightarrow U$ induziert für eine offene Teilmenge $U \subseteq Y$.

Proposition A.20. Sei X ein integrales Schema von endlichem Typ über k . Dann gilt:

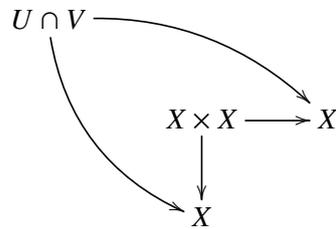
- (i) Ist X separiert, so ist auch $X(k)$ separiert.
- (ii) Ist X normal, dann ist auch $X(k)$ normal.
- (iii) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine offene Immersion, dann ist auch $f| : X(k) \rightarrow Y(k)$ eine offene Immersion.
- (iv) Wir nehmen an, dass $X(k)$ eine affine offene Überdeckung $X(k) = \bigcup_i \text{Spec}(A_i)(k)$ besitzt, wobei zusätzlich gilt, dass der Schnitt zweier solcher Teilmengen wieder affin ist: $\text{Spec}(A_i)(k) \cap \text{Spec}(A_j)(k) = \text{Spec}(A_{i,j})(k)$. Es sei $\varphi_{i,j} : \text{Spec}(A_{i,j})(k) \rightarrow \text{Spec}(A_j)(k)$ der jeweilige Inklusionsmorphismus. Dann gilt:

$X(k)$ wird affin überdeckt durch die $\text{Spec}(A_i)$ und auch hier sind die Schnitte wieder affin und durch die gleichen Ringe gegeben: $\text{Spec}(A_i) \cap \text{Spec}(A_j) = \text{Spec}(A_{i,j})$. Zusätzlich ist der Inklusionsmorphismus $\text{Spec}(A_{i,j}) \rightarrow \text{Spec}(A_j)$ vom selben k -Algebrenhomomorphismus $A_j \rightarrow A_{i,j}$ induziert wie $\varphi_{i,j}$.

Beweis Siehe [Bra] und [Mur] □

Lemma A.21. *Sei X eine separierte Prävarietät und $U, V \subseteq X$ affin, offen, dann ist auch $U \cap V \subseteq X$ affin.*

Beweis Das Diagramm



induziert den Pfeil $U \cap V \rightarrow X \times X$, der offenbar ein Isomorphismus auf $\Delta(X) \cap (U \times V)$ ist. Da U und V affin sind, ist es auch $U \times V$. $\Delta(X)$ ist abgeschlossen, also ist $\Delta(X) \cap (U \times V)$ als abgeschlossene Teilmenge einer affinen Varietät zumindest wieder algebraisch. Da aber U und V irreduzibel ist, ist auch der Schnitt $U \cap V$ irreduzibel, also ist er eine affine Varietät. □

Literaturverzeichnis

- [Alt] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1999.
- [Bos] Siegfried Bosch. *Lineare Algebra*. Springer, 2014.
- [Bra] Martin Brandenburg. Separated prevarieties and schemes. Mathematics Stack Exchange. <http://math.stackexchange.com/q/649416> (version: 2014-01-24).
- [Bru] Jonathan Brundan. Algebraic Groups. <http://pages.uoregon.edu/brundan/math681fall107/notes2.pdf>.
- [daw] daw. Why are convex polyhedral cones closed? Mathematics Stack Exchange. <http://math.stackexchange.com/q/1166181> (version: 2015-02-26).
- [Ful] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, 1993.
- [Har] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Mac] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1994.
- [Mur] Takumi Murayama. Properties of the functor $(X, \mathcal{O}_X) \mapsto (X(k), \mathcal{O}_{X(k)})$. Mathematics Stack Exchange. <http://math.stackexchange.com/q/1354756> (version: 2015-07-09).
- [Oda] Tadao Oda. *Lectures on Toric Embeddings and Applications*. Springer.
- [Sch] David A. Cox, John B. Little, Henry K. Schenk. *Toric Varieties*. American Mathematical Society, 2011.
- [Sha] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry II*. Springer, 2013.
- [Sta] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2015.
- [Sum] Hideyasu Sumihiro. Equivariant Completion. *J. Math. Kyoto Univ* **14**(1984), 1–28.
- [Wed] Ulrich Goertz, Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I*. Vieweg+Teubner, 2010.
- [Zie] R. Stöcker, H. Zieschang. *Algebraische Topologie*. B. G. Teubner Stuttgart, 1988.

Danksagung

Ich möchte mich hier bei einigen bedanken, die zum Erfolg meines Studiums und dieser Arbeit beigetragen haben.

Allen voran gilt mein Dank Oliver Thomas, der mir bei der Anfertigung dieser Bachelorarbeit mit Rat und Tat zur Seite stand. Ich danke Dr. Thomas Reichelt, aus dessen Vorlesung zur torischen Geometrie ich den Beweis von Lemma 2.1 übernommen habe und Leo Graf, der mir die Anschauung für den Beweis von Lemma 2.7 lieferte. Außerdem danke ich Professor Dr. Kay Wingberg, der mir mit seinen Vorlesungen, die ich seit dem ersten Semester besuche, den Weg zur Algebra und algebraischen Geometrie gewiesen hat.

Zuguterletzt danke ich dem Bundesausbildungsförderungsgesetz für die finanzielle Unterstützung.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig unter Anleitung verfasst habe, dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe, und dass ich alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entlehnt sind, durch die Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht habe.

Heidelberg, den 11.08.2015