Kohärente Systeme I: Der Okasche Kohärenzsatz

Leon Lang

04.12.2014

1 Begriffe und Definitionen

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge und $a \in U$ ein Punkt. Am Ende des dritten Vortrages wurde der Ring $\mathcal{O}_{U,a}$ der Keime analytischer Funktionen eingeführt und dieser mit dem Ring konvergenter Potenzreihen mit Entwicklungspunkt a identifiziert:

$$\mathcal{O}_{U,a} = \mathbb{C}\{z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n\}$$

Mit dieser Identifikation - zwei mal angewendet - können wir auch unmittelbar $\mathcal{O}_{U,a}$ mit $\mathcal{O}_{V,a}$ identifizieren, wenn V eine andere offene Menge ist, welche a enthält.
Jeder holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist ihr Keim $f_a = [f, V] \in \mathcal{O}_{U,a}$ zugeordnet ($a \in V \subseteq U$ eine offene Menge) bzw. äquivalent ihre Potenzreihenentwicklung in a. Diese bezeichnen wir vermöge obiger Identifikation ebenfalls mit f_a. Ist allgemeiner f ein m-Tupel oder eine Matrix holomorpher Funktionen auf U, so wird f_a komponentenweise gebildet, d.h.: Ist $f = \left(f_{ij}\right)$, so ist $f_a := \left((f_{ij})_a\right)$.
Sei m eine natürliche Zahl und M_a ein Untermodul des freien $\mathcal{O}_{U,a}$-Moduls vom Rang m:

$$M_a \subseteq \mathcal{O}_{U,a}^m = \overbrace{\mathcal{O}_{U,a} \times \cdots \times \mathcal{O}_{U,a}}^{m-fach}$$

Solche Untermoduln sind stets endlich erzeugt, denn $\mathcal{O}_{U,a}^m$ ist als der freie Modul vom Grad m über dem noetherschen Ring $\mathcal{O}_{U,a}$ selbst noethersch (siehe zum Beispiel [MFA] (S. 76, Korollar 6.4)).
Sei nun m fest. Jedem $a \in U$ sei solch ein Untermodul $M_a \subseteq \mathcal{O}_{U,a}^m$ zugeordnet. Eine Schar $M = (M_a) = (M_a)_{a \in U}$ heißt dann *System*. Ist $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge, so definiert man das eingeschränkte System $M|_V$ durch $(M|_V)_a = M_a$ für $a \in V$. Hier macht sich das erste mal die Identifikation $\mathcal{O}_{U,a} = \mathcal{O}_{V,a}$ bemerkbar. M_a ist im eingeschränkten System formal ein Untermodul von $\mathcal{O}_{V,a}^m$.

Definitionen Das System $M = (M_a)_{a \in U}$, $M_a \subseteq \mathcal{O}_{U,a}^m$ heißt *endlich erzeugt*, falls es $f^{(i)} \in \mathcal{O}(U)^m$, $1 \leq i \leq k$ gibt, sodass M_a für alle $a \in U$ als $\mathcal{O}_{U,a}$-Modul von $\left\{f_a^{(1)}, \ldots, f_a^{(k)}\right\}$ erzeugt wird. Die Menge $\left\{f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}\right\}$ nennen wir dann *Erzeugendensystem* von M.

Hingegen dazu heißt M *kohärent*, falls es wenigstens noch lokal endlich erzeugt ist, wenn es also zu jedem $a \in U$ eine offene Umgebung $a \in V \subseteq U$ gibt, sodass das eingeschränkte System $M|_V$ endlich erzeugt ist.
Offenbar ist jedes endlich erzeugte System auch lokal endlich erzeugt (man nehme als Menge V jedesmal $V = U$).

Nun seien p und q natürliche Zahlen. $\mathcal{O}(U)$-lineare Abbildungen

$$F : \mathcal{O}(U)^p \to \mathcal{O}(U)^q$$

werden wie gewöhnlich von $q \times p$-Matrizen repräsentiert, welche wir wieder genauso bezeichnen wie die Abbildung selbst:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1p} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{q1} & F_{q2} & \cdots & F_{qp} \end{pmatrix}$$

Schreibt man die Elemente von $\mathcal{O}(U)^p$ und $\mathcal{O}(U)^q$ als Spaltenvektoren, so ist wie üblich

$$F(f) = F \cdot f \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{O}(U)^p.$$

Ist $a \in U$ ein Punkt, so induziert die Matrix $F_a = ((F_{ij})_a)$ eine $\mathcal{O}_{U,a}$-lineare Abbildung

$$F_a : \mathcal{O}_{U,a}^p \to \mathcal{O}_{U,a}^q.$$

2 Erste einfache Eigenschaften

Anders als in der Seminargrundlage [Fre] wollen wir zuerst einige einfache Eigenschaften kohärenter Systeme beweisen. Dies dient vor allem dazu, ein Gefühl für die Definitionen zu bekommen. Beide Aussagen werden wir nicht mehr in dieser Ausarbeitung bzw. im dazugehörigen Vortrag benötigen, aber sehr wohl in weiteren Vorträgen.

Proposition 2.1 *Es seien*

$$M = (M_a)_{a \in U}, \quad M_a \subseteq \mathcal{O}_{U,a}^m; \quad N = (N_a)_{a \in U}, \quad N_a \subseteq \mathcal{O}_{U,a}^m$$

zwei kohärente Systeme auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}^n$. Es gelte $M_{a_0} \subseteq N_{a_0}$ für einen Punkt $a_0 \in U$.
Dann folgt sogar $M_a \subseteq N_a$ für alle a aus einer einer vollen Umgebung von a_0.
Ist sogar $M_{a_0} = N_{a_0}$, so folgt demnach $M_a = N_a$ in einer vollen Umgebung von a_0.

Beweis Es sei $a_0 \in V \subseteq U$ eine offene Umgebung, sodass es $f^{(1)}, \dots, f^{(k)} \in \mathcal{O}(V)^m$ gibt, die $M|_V$ erzeugen. Analog sei $a_0 \in V' \subseteq U$ eine offene Umgebung mit entsprechenden $g^{(1)}, \dots, g^{(k')} \in \mathcal{O}(V')^m$, welche $N|_{V'}$ erzeugen.
Wir setzen $W = V \cap V'$ und schränken unsere Erzeuger auf W ein (und bezeichnen sie dann wieder genauso). Zunächst ist

$$\left\langle f_{a_0}^{(1)}, \dots, f_{a_0}^{(k)} \right\rangle = M_{a_0} \subseteq N_{a_0} = \left\langle g_{a_0}^{(1)}, \dots, g_{a_0}^{(k')} \right\rangle.$$

Das heißt wir erhalten (hier beispielhaft nur für $f_{a_0}^{(1)}$ ausgeführt) k Gleichungen der Form

$$f_{a_0}^{(1)} = P_1 g_{a_0}^{(1)} + \dots + P_{k'} g_{a_0}^{(k')}$$

mit $P_i \in \mathcal{O}_{W,a_0}$. Jedes P_i wird auf einer kleinen Umgebung $a_0 \in W_i \subseteq W$ von einer holomorphen Funktion Q_i repräsentiert. Sei W' der Schnitt all solcher Umgebungen. Obige Gleichung bedeutet dann, dass die linke und rechte Seite auf einer noch kleineren Umgebung W''

global übereinstimmen, wir bekommen also (nach nicht weiter bezeichneter Einschränkung von $f^{(1)}$ und den $g^{(i)}$) die Gleichung

$$f^{(1)} = Q_1 g^{(1)} + \cdots + Q_{k'} g^{(k')}.$$

Diese bleibt dann lokal für jedes $a \in W''$ erhalten, wenn wir die Keime bilden, es ist also $f_a^{(1)} \in \left\langle g_a^{(1)}, \ldots, g_a^{(k')} \right\rangle$ für jedes $a \in W''$.
Diese Prozedur können wir in einer entsprechend kleinen Umgebung mit allen $f^{(i)}$ durchführen und erhalten dort für alle i: $f_a^{(i)} \in \left\langle g_a^{(1)}, \ldots, g_a^{(k')} \right\rangle = N_a$, also insgesamt $M_a \subseteq N_a$. □

Hilfssatz 2.2 *Sei $F : \mathcal{O}(U)^p \to \mathcal{O}(U)^q$ ($U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen) eine $\mathcal{O}(U)$-lineare Abbildung und sei $M = (M_a)_{a\in U}$, $M_a \subseteq \mathcal{O}_{U,a}^p$ ein endlich erzeugtes System. Dann ist auch das Bildsystem*

$$N = (N_a)_{a\in U}\ ;\ \ N_a = F_a(M_a) \subseteq \mathcal{O}_{U,a}^q$$

endlich erzeugt. Die gleiche Aussage gilt auch für "kohärent" anstelle von "endlich erzeugt".

Beweis Sei $\left\{f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}\right\}$ ein Erzeugendensystem von M. Wir wollen sehen, dass dann $\left\{g^{(1)}, \ldots, g^{(k)}\right\}$ mit $g^{(i)} = F(f^{(i)})$ ein Erzeugendensystem von N ist.
Zunächst stellt man fest, dass tatsächlich

$$g_a^{(i)} = F(f^{(i)})_a = F_a(f_a^{(i)}) \in F_a(M_a) = N_a$$

ist. Um dabei zweite Gleichheitszeichen zu verstehen, repräsentiert man am besten F durch eine Matrix und ruft sich die Definition der Multiplikation und Addition von Keimen ins Gedächtnis.
Ist nun $P \in N_a$, so gibt es ein $Q \in M_a$ mit $P = F_a(Q)$. M_a wird aber von den $f_a^{(i)}$ erzeugt und wir erhalten eine Gleichung

$$Q = Q_1 f_a^{(1)} + \cdots + Q_k f_a^{(k)} \quad ; \quad Q_i \in \mathcal{O}_{U,a}.$$

Dann ist aber

$$P = F_a(Q) = Q_1 g_a^{(1)} + \cdots + Q_k g_a^{(k)} \in \left\langle g_a^{(1)}, \ldots, g_a^{(k)} \right\rangle,$$

also ist N tatsächlich endlich erzeugt.

Nun wollen wir die Aussage beweisen, bei der M nur kohärent ist. Sei $a \in U$ ein Punkt und $a \in V \subseteq U$ eine offene Menge, sodass $M|_V$ endlich erzeugt ist. Die Einträge von F (aufgefasst als Matrix) sind Elemente aus $\mathcal{O}(U)$. Schränken wir diese auf V ein so erhalten wir die genauso bezeichnete, $\mathcal{O}(V)$-lineare Abbildung $F : \mathcal{O}(V)^p \to \mathcal{O}(V)^q$. Diese Bezeichnungsweise ist insofern konsistent, als dass wegen der Identifizierung $\mathcal{O}_{U,a} = \mathcal{O}_{V,a}$ immerhin die Keimabbildungen F_a mit den vorherigen Keimen übereinstimmen.
$M|_V$ ist endlich erzeugt und nach dem bisher gezeigten (angewendet auf unsere modifizierte Abbildung F) also auch $N|_V$. □

3 Der Okasche Kohärenzsatz

In diesem letzten Abschnitt wollen wir den Kohärenzsatz von Oka beweisen.

Theorem 3.1 *Sei $F : \mathcal{O}(U)^p \to \mathcal{O}(U)^q$ ($U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen) eine $\mathcal{O}(U)$-lineare Abbildung. Dann ist das Kernsystem*

$$M = (M_a)_{a\in U}, \;\; M_a = Kern(F_a) \subseteq \mathcal{O}^p_{U,a}$$

kohärent.

Beweis Der Beweis wird bei festem $p, n \in \mathbb{N}$ per Induktion nach der Dimension q des Zielraumes geführt. Da wir den Induktionsschluss erstaunlicherweise für den Induktionsanfang benötigen (dies wird sich noch legitimieren), folgt zunächst der Induktionsschluss:

1. Schritt. Induktionsschluss:

Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle natürlichen Zahlen kleiner als q bereits bewiesen ist. Sei $a_0 \in U$ ein beliebiger aber fester Punkt. Es wird die endliche Erzeugbarkeit in einer kleinen offenen Umgebung von a_0 bewiesen. Dazu kann U beliebig verkleinert werden (F wird dazu wie im Beweis des zweiten Teils von Hilfssatz 3.2 modifiziert, was lokal nichts am Kernsystem verändert).
Wir betrachten die beiden natürlichen Projektionen

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \mathcal{O}(U)^{q-1} \\ \mathcal{O}(U)^q = \mathcal{O}(U)^{q-1} \times \mathcal{O}(U) \arrow[ur, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\beta"'] & \\ & \mathcal{O}(U) \end{tikzcd}$$

D.h.: α ist gegeben durch $\alpha(P_1, \ldots, P_q) = (P_1, \ldots, P_{q-1})$ und β durch $\beta(P_1, \ldots, P_q) = P_q$. Nach Induktionsvoraussetzung, angewendet auf die Abbildung

$$\alpha \circ F : \mathcal{O}(U)^p \to \mathcal{O}(U)^{q-1}$$

existieren nach eventueller Verkleinerung von U endlich viele Tupel $A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \in \mathcal{O}(U)^p$, sodass deren Keime $A^{(i)}_a$ in jedem Punkt $a \in U$ den Kern von $(\alpha \circ F)_a = \alpha_a \circ F_a$ erzeugen. Wir schreiben diese Tupel in eine Matrix $A = (A^{(1)}, \ldots, A^{(m)})$ und erhalten so eine Abbildung

$$A : \mathcal{O}(U)^m \to \mathcal{O}(U)^p \;\; ; \;\; (f_1, \ldots, f_m) \mapsto f_1 A^{(1)} + \cdots + f_m A^{(m)}$$

Die Abbildung $F \circ A$ setzen wir zusammen mit der Projektion β und erhalten die Abbildung $\beta \circ F \circ A : \mathcal{O}(U)^m \to \mathcal{O}(U)$. Wieder nach Induktionsvoraussetzung gibt es (nach eventueller Verkleinerung von U) auch zu dieser Abbildung $B^{(1)}, \ldots, B^{(l)} \in \mathcal{O}(U)^m$, deren Keime in jedem Punkt $a \in U$ den Kern von $(\beta \circ F \circ A)_a$ erzeugen.

Behauptung: Die Bilder $C^{(i)} := A(B^{(i)}) \in \mathcal{O}(U)^p$ sind das gewünschte Erzeugendensystem für das Kernsystem von F.

Zunächst veranschaulichen wir das bisherige Spektakel in einem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{O}(U)^{q-1} \\ \mathcal{O}(U)^m \arrow[r, "A"] \arrow[rrr, bend right, "\beta\circ F\circ A"'] & \mathcal{O}(U)^p \arrow[r, "F"] \arrow[rru, bend left, "\alpha\circ F"] & \mathcal{O}(U)^q \arrow[ru, "\alpha"] \arrow[rd, "\beta"] & \\ & & & \mathcal{O}(U) \end{tikzcd}$$

Sei nun $a \in U$ ein beliebiger Punkt. Wir zeigen zunächst $C_a^{(i)} \in \mathrm{Kern}(F_a)$. Wegen $F = (\alpha \circ F,\ \beta \circ F)$ genügt es, dies für die linke und rechte Komponente einzeln zu zeigen:

$$(\alpha \circ F)_a(C_a^{(i)}) = \overbrace{((\alpha \circ F)_a \circ A_a)}^{=0}(B_a^{(i)}) = 0$$

Dies folgt daraus, dass nach Konstruktion jeder Spaltenvektor aus A_a auf $(\alpha \circ F)_a$ verschwindet. Weiter:

$$(\beta \circ F)_a(C_a^{(i)}) = (\beta \circ F \circ A)_a(B_a^{(i)}) = 0,$$

wobei das letzte einfach in der Konstruktion der $B^{(i)}$ so gefordert wurde.
Nun müssen wir zeigen, dass jedes fest gewählte $P \in \mathrm{Kern}(F_a)$ auch wirklich über dem Ring $\mathcal{O}_{U,a}$ eine Linearkombination der $C_a^{(i)}$ ist:
Wegen $P \in \mathrm{Kern}(F_a)$ ist insbesondere $P \in \mathrm{Kern}((\alpha \circ F)_a)$, und dieser Kern wird von den $A_a^{(i)}$ erzeugt. Wir erhalten also eine Gleichung

$$P = Q_1 A_a^{(1)} + \cdots + Q_m A_a^{(m)} \ ; \ Q_i \in \mathcal{O}_{U,a}$$

Das heißt aber gerade, dass P das Bild von $Q = (Q_1, \ldots, Q_m)$ unter der Abbildung A_a ist. Wegen $P \in \mathrm{Kern}(F_a)$ ist dann $Q \in \mathrm{Kern}(F_a \circ A_a)$, also insbesondere $Q \in \mathrm{Kern}(\beta_a \circ F_a \circ A_a) = \mathrm{Kern}((\beta \circ F \circ A)_a)$. Dieser Kern wird nach Konstruktion von den $B_a^{(i)}$ erzeugt und wir erhalten

$$Q = Z_1 B_a^{(1)} + \cdots + Z_l B_a^{(l)} \ ; \ Z_i \in \mathcal{O}_{U,a}$$

Somit folgt

$$P = A_a(Q) = Z_1 A_a(B_a^{(1)}) + \cdots + Z_l A_a(B_a^{(l)}) = Z_1 C_a^{(1)} + \cdots + Z_l C_a^{(l)},$$

also gerade die Behauptung. □

2. Schritt. Das Okasche Lemma

Zunächst benötigen wir einige Bezeichnungen, um das Lemma für den Induktionsanfang formulieren und beweisen zu können

Bezeichnungen $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ = Ring der konvergenten Potenzreihen
$\mathcal{O}_{n-1}[z_n : m] = \{P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \ ; \ \deg(P) < m\}$
Offenbar ist $\mathcal{O}_{n-1}[z_n : m]$ ein freier $\mathcal{O}_{n-1}$-Modul mit Basis $1, z_n, \ldots, z_n^{m-1}$. Über die Abbildung $\sum P_i z_n^i \mapsto (P_i)$ hat man die Isomorphie $\mathcal{O}_{n-1}[z_n : m] \cong \mathcal{O}_{n-1}^m$ von $\mathcal{O}_{n-1}$-Moduln.

Lemma 3.2 *Gegeben sei eine $\mathcal{O}_n$-lineare Abbildung $F : \mathcal{O}_n^p \to \mathcal{O}_n$. K bezeichne den Kern dieser Abbildung.*
Wir nehmen an, dass die Einträge des Tupels F normierte Polynome in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ vom Grad $< d$ seien (sie sind also insbesondere z_n-allgemein). F induziert dann für jedes $m \in \mathbb{N}$ durch Einschränkung eine $\mathcal{O}_{n-1}$-lineare Abbildung

$$\mathcal{O}_{n-1}[z_n : m]^p \to \mathcal{O}_{n-1}[z_n : m + d] \subseteq \mathcal{O}_n$$

deren Kern wir mit K_m bezeichnen (Falls $n = 1$ ist - diesen Fall benötigen wir später ebenfalls - so sei $\mathcal{O}_{n-1} = \mathbb{C}$). Dieser Kern ist ein $\mathcal{O}_{n-1}$-Modul. Wir fragen uns, wie groß dieser wird, wenn wir sein Erzeugnis (als $\mathcal{O}_n$-Modul) in $\mathcal{O}_n^p$ betrachten:
Behauptung: *Für $m \geq 3d$ erzeugt K_m den Kern K als $\mathcal{O}_n$-Modul. (Das ist wegen $K_m \subseteq K_{m'}$ für $m \leq m'$ natürlich gleichbedeutend dazu, dass K_{3d} den Kern K erzeugt. Dies werden wir zeigen)*

Beweis Wir schreiben F als Tupel $F = (F_1, \ldots, F_P)$. Wir wollen die allgemeine Aussage auf eine schärfere Behauptung zurückführen, für den Fall, dass F_1 sogar ein Weierstraßpolynom ist:

Behauptung: Ist F_1 ein Weierstraßpolynom, so wird K bereits von K_m als $\mathcal{O}_n$-Modul erzeugt, wenn $m \geq 2d$.

Wir nehmen vorerst an, die Behauptung sei war, und wollen daraus die allgemeine Aussage folgern: Auch wenn F_1 kein Weierstraßpolynom (und keine Einheit) ist, können wir nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ([Fre], Seite 15, Satz 2.7) immerhin schreiben:

$$F_1 = Q \cdot U; \;\; Q \text{ Weierstraßpolynom}; \;\; U \text{ Einheit in } \mathcal{O}_n.$$

Für den Fall, dass F_1 eine Einheit ist, wählen wir $Q = 1$ und $U = F_1$ als Zerlegung. Sei nun $G = (G_1, \ldots, G_p) \in K$, d.h.

$$G_1 F_1 + \cdots + G_p F_p = 0.$$

Definieren wir $\tilde{G}_1 := UG_1, \tilde{G}_k := G_k$, wenn $k \geq 2$, so erhalten wir

$$\tilde{G}_1 Q + \tilde{G}_2 F_2 + \cdots + \tilde{G}_p F_p = 0,$$

d.h. $\tilde{G} = (\tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_p)$ ist im Kern $\tilde{K}$ der Abbildung $\tilde{F} := (Q, F_2, \ldots, F_p)$. Hierauf wollen wir unsere erste Behauptung anwenden, $\tilde{K}_m$ sei entsprechend wie oben definiert. Die Anwendung ist möglich, da Q ein Weierstraßpolynom ist. Dann ist $\tilde{G} \in \left\langle \tilde{K}_{2d} \right\rangle$ nach unserer Behauptung, es besteht also eine Beziehung der Form

$$\tilde{G} = \tilde{Z}_1 \tilde{P}^{(1)} + \cdots + \tilde{Z}_k \tilde{P}^{(k)}$$

mit $\tilde{Z}_i \in \mathcal{O}_n$ und $\tilde{P}^{(i)} \in \tilde{K}_{2d}$. Wir wollen daraus eine Gleichung für G ableiten. Zu $\tilde{P}^{(i)} = (\tilde{P}_1^{(i)}, \ldots, \tilde{P}_p^{(i)})$ definieren wir $P^{(i)} = (P_1^{(i)}, \ldots, P_p^{(i)})$ durch

$$P_1^{(i)} = \tilde{P}_1^{(i)}, \;\; P_j^{(i)} = U\tilde{P}_j^{(i)} \;\text{ für }\; j \geq 2.$$

Wir definieren außerdem $Z_i = U^{-1}\tilde{Z}_i \in \mathcal{O}_n$. Offenbar ist dann

$$G = Z_1 P^{(1)} + \cdots + Z_k P^{(k)}.$$

Es bleibt hier noch zu zeigen, dass jedes $P^{(i)}$ auch wirklich im Kern K_{3d} liegt: Es ist

$$F(P^{(i)}) = F_1 P_1^{(i)} + \cdots + F_p P_p^{(i)} = U \cdot \tilde{F}(\tilde{P}^{(i)}) = 0$$

Nun ist Q ein Weierstraßpolynom und $F_1 = UQ$ ein Polynom in z_n. Somit folgt nach [Fre] (Seite 19, Hilfssatz 3.1), dass auch U ein Polynom in z_n ist. Aus Gradgründen - denn $F_1 = Q \cdot U$ hat ja Grad kleiner als d - hat dann auch U einen Grad kleiner als d, und somit jeder Eintrag von $P^{(i)}$ wegen der Darstellung $P_j^{(i)} = U\tilde{P}_j^{(i)}$ einen Grad kleiner als $3d$. Das beendet den Beweis. Wir kommen zur aufgeschobenen Behauptung:

Beweis der Behauptung:

Sei $G = (G_1, \ldots, G_p) \in K$. Da F_1 ein Weierstraßpolynom ist, folgt nach dem Divisionssatz ([Fre], Seite 12, Satz 2.3), auf jede Komponente von G angewandt:

$$G = F_1 A + B \ , \ A \in \mathcal{O}_n^p, \ B \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n : d]^p.$$

Die Tupel

$$H^{(j)} = (-F_j, 0, \ldots, 0, F_1, 0, \ldots, 0) \ ; \ 1 < j \leq p$$

liegen offenbar alle im Kern K von F (dabei ist der Eintrag F_1 an der j-ten Stelle). Es ist (man liest das am besten von rechts nacht links)

$$\begin{aligned}
F_1 A &= (A_1 F_1, \ldots, A_p F_1) \\
&= (-[A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p], A_2 F_1, \ldots, A_p F_1)) + (A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p, 0, \ldots, 0) \\
&= \sum_{j=2}^{p} (-A_j F_j, 0, \ldots, 0, A_j F_1, 0, \ldots, 0) + (A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p, 0, \ldots, 0) \\
&= \sum_{j=2}^{p} A_j H^{(j)} + (A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
H :&= B + (A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p, 0, \ldots, 0) \\
&= G - F_1 A + (A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p, 0, \ldots, 0) \\
&= G - \sum_{j=2}^{p} A_j H^{(j)}
\end{aligned}$$

im Kern K enthalten (denn G und die Summe sind dies). Setzen wir H in F ein, so erhalten wir

$$F_1(B_1 + A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p) + F_2 B_2 + \cdots + F_p B_p = 0,$$

bzw.

$$F_1(A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p) = -(F_1 B_1 + F_2 B_2 + \cdots + F_p B_p) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n : 2d]$$

Da F_1 ein Weierstraßpolynom ist, folgt wieder aus [Fre] (Seite 19, Hilfssatz 3.1), dass auch $A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p$ ein Polynom in z_n ist, und da der Grad sich bei Produktbildung addiert, muss es in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n : 2d]$ liegen.
Da H im Kern K von F liegt und wir jetzt wissen, dass es sogar Element von $\mathcal{O}_{n-1}[z_n : 2d]^p$ ist, haben wir folglich $H \in K_{2d}$. Die Gleichung

$$G = (G - H) + H = \sum_{j=2}^{p} A_j H^{(j)} + H \in \langle K_{2d} \rangle$$

zeigt schließlich die Behauptung. □

3. Schritt. Induktionsanfang

Wir werden nun den Induktionsanfang beweisen. Wir wollen also zeigen, dass das Kernsystem jeder $\mathcal{O}(U)$-linearen Abbildung

$$F : \mathcal{O}(U)^p \to \mathcal{O}(U)$$

kohärent ist. Hierzu gehen wir wieder induktiv vor, und zwar nach der Dimension n in $\mathbb{C}^n$. Wir nehmen an, dass der Induktionsanfang bereits getätigt ist, und beginnen wieder mit dem Induktionsschluss. Für $n-1$ sei der Kohärenzsatz also bereits bewiesen.
Wir schreiben $F = (F_1, \ldots, F_p)$. Zu einem vorgegebenen Punkt $a_0 \in U$ müssen wir wieder die endliche Erzeugbarkeit des Kernsystems in einer kleinen Umgebung von a_0 in U zeigen. Ohne Einschränkung nehmen wir dazu $a_0 = 0$ an. Wie bereits im ersten Schritt können wir auch hier U beliebig verkleinern.
Wir machen U also zu einem kleinen Polyzylinder mit Mittelpunkt 0, in welchem die Potenzreihenentwicklungen aller F_i im Nullpunkt konvergieren. Wir können annehmen, dass diese Entwicklungen normierte z_n-allgemeine Potenzreihen sind, deren Grad durch ein $d \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. (Die genaue Argumentation hierzu folgt aus didaktischen Gründen erst im Anhang)
Da U ein Polyzylinder ist, können wir $U = V \times B_r(0)$ mit einem Polyzylinder $V \in \mathbb{C}^{n-1}$ schreiben. Wir betrachten nun den Polynomring $\mathcal{O}(V)[z_n]$. Wegen der speziellen Gestalt von U können wir in Elemente dieses Rings beliebige $z \in U$ einsetzen und erhalten so wohldefinierte holomorphe Funktionen auf U. Wie im okaschen Lemma können wir außerdem für $m \in \mathbb{N}$ den Ring $\mathcal{O}(V)[z_n : m]$ derjenigen Polynome aus $\mathcal{O}(V)[z_n]$ betrachten, deren Grad kleiner ist als m. Wir haben also natürliche Inklusionen

$$\mathcal{O}(V)[z_n : m] \subseteq \mathcal{O}(V)[z_n] \subseteq \mathcal{O}(U).$$

Wir interessieren uns vor allem für die $\mathcal{O}(V)$-Modul-Struktur des ersten Moduls. Man bekommt (siehe „Bezeichnungen“ vor Lemma 4.2) zwei natürliche $\mathcal{O}(V)$-Modulisomorphismen $\varphi : \mathcal{O}(V)^{mp} \to \mathcal{O}(V)[z_n : m]^p$ und $\psi : \mathcal{O}(V)[z_n : m+d] \to \mathcal{O}(V)^{m+d}$. Dadurch erhält man ein kommutatives Diagramm von $\mathcal{O}(V)$-Modulhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(V)[z_n : m]^p \arrow[r, "F|"] & \mathcal{O}(V)[z_n : m+d] \arrow[d, "\psi"] \\
\mathcal{O}(V)^{mp} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dotted, "\tilde{F}|"'] & \mathcal{O}(V)^{m+d}
\end{tikzcd}$$

Man beachte, dass die Einschränkung $F|$ von F tatsächlich wohldefiniert ist, denn jede Komponente von F liegt in $\mathcal{O}(V)[z_n : d]$. $\tilde{F}|$ ist dabei die einzig mögliche Abbildung, die das Diagramm kommutieren lässt. Die Idee des Beweises ist nun die Folgende:
Da $\tilde{F}|$ eine $\mathcal{O}(V)$-lineare Abbildung ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung und Schritt 1 - nach Verkleinerung von U und V - ein endliches Erzeugendensystem E des Kernsystems von $\tilde{F}|$. Die Menge $\varphi(E)$ erzeugt dann das Kernsystem von $F|$. Wir hoffen dann, dass $\varphi(E)$ - aufgefasst als endliche Teilmenge von $\mathcal{O}(U)^p$ - für ein genügend großes m ein Erzeugendensystem des Kernsystems von F ist, und wollen hierfür das okasche Lemma anwenden.

Sei dazu $a \in U$ beliebig und fest, a' sei die Projektion von a auf die ersten $n-1$ Komponenten. Wir erhalten dann das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{V,a'}[z_n - a_n : m]^p & \mathcal{O}(V)[z_n : m]^p \arrow[l, "a"'] \\
\mathcal{O}_{V,a'}^{mp} \arrow[u, "\varphi_a"] & \mathcal{O}(V)^{mp} \arrow[l, "a"] \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist a jeweils die Abbildung, die die jeweiligen Funktionen (oder Tupel von Funktionen) auf ihre Keime in a abbildet. φ_a ist die einzige Abbildung, die wieder alles kommutieren lässt und darüberhinaus ebenfalls ein Isomorphismus (die Umkehrabbildung wird von der Umkehrabbildung von φ induziert). Man rechnet nun mit Hilfe der folgenden kommutativen Diagramms nach, dass $(\varphi_a \circ a)(E)$ den Kern von $(F|)_a$ erzeugt:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{V,a'}[z_n - a_n : m]^p \arrow[r, "(F|)_a"] & \mathcal{O}_{V,a'}[z_n - a_n : m + d] \arrow[d, "\psi_a"] \\
\mathcal{O}_{V,a'}^{mp} \arrow[u, "\varphi_a"] \arrow[r, "(\tilde{F}|)_{a'}"'] & \mathcal{O}_{V,a'}^{m+d}
\end{tikzcd}$$

Dabei soll ψ_a genauso gewonnen werden wir zuvor φ_a. Beim oberen Pfeil sind wir inhaltlich bereits beim okaschen Lemma angelangt: Wir müssen ihn nur mit einem Isomorphismus zu einem Pfeil zwischen reinen Potenzreihenringen umbauen:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{n-1}[z_n : m]^p \arrow[r, dotted, "(\tilde{F}|)_a"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathcal{O}_{n-1}[z_n : m + d] \\
\mathcal{O}_{V,a'}[z_n - a_n : m]^p \arrow[r, "(F|)_a"] & \mathcal{O}_{V,a'}[z_n - a_n : m + d] \arrow[u, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist τ der Isomorphismus, der einen Repräsentanten eines Elements zuerst in a entwickelt, und dann in der Entwicklung $z - a$ durch z substituiert. σ ist die Umkehrabbildung eines entsprechenden Isomorphismus und $(\tilde{F}|)_a$ die vom Diagramm induzierte Abbildung. Wieder folgt, dass $(\sigma^{-1} \circ \varphi_a \circ a)(E)$ ein endliches Erzeugendensystem des Kerns von $(\tilde{F}|)_a$ ist. Es sieht nun beinahe so aus, als wären wir in der Situation des Lemmas, mit dem einzigen Problem, dass wir keine übergeordnete Abbildung $\mathcal{O}_n^p \to \mathcal{O}_n$ haben. Jedoch können wir so eine leicht durch F induzieren lassen und dann bestätigen, dass deren Einschränkung mit unserer eigenartig definierten Abbildung $(\tilde{F}|)_a$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n^p \arrow[r, dotted, "\tilde{F}_a"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathcal{O}_n \\
\mathcal{O}_{U,a}^p \arrow[r, "F_a"'] & \mathcal{O}_{U,a} \arrow[u, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist σ und τ zu verstehen wie oben - die obigen Abbildungen sind also die Einschränkungen dieser beiden. Schränken wir den oberen Pfeil auf $\mathcal{O}_{n-1}[z_n : m]^p$ ein, so erhalten wir das interessante Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n^p \arrow[r, "\tilde{F}_a"] & \mathcal{O}_n \\
\mathcal{O}_{n-1}[z_n : m]^p \arrow[u, hook] \arrow[r, bend left=5, "\tilde{F}_a|"] \arrow[r, bend right=5, "(\tilde{F}|)_a"'] & \mathcal{O}_{n-1}[z_n : m + d] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Die beiden Abbildungen unten sind identisch! Also ist $(\sigma^{-1} \circ \varphi_a \circ a)(E)$ ein endliches Erzeugendensystem des Kerns von $\tilde{F_a}|$. nach dem okaschen Lemma ist daher für $m \geq 3d$ das Bild dieser Menge in $\mathcal{O}_n^p$ ein endliches Erzeugendensystem des Kerns von $\tilde{F}_a$. Folglich ist $(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \varphi_a \circ a)(E) = (\varphi_a \circ a)(E)$ eines für die Abbildung F_a. Wenn wir nun zeigen können, dass das Bild von $\varphi(E)$ in $\mathcal{O}_{U,a}^p$ mit $(\varphi_a \circ a)(E)$ übereinstimmt, dann ist tatsächlich $\varphi(E)$ unser gesuchtes Erzeugendensystem und wir sind fertig. Das folgt jedoch aus der Kommutativität des zweiten rechteckigen Diagramms, das wir oben betrachtet haben. Veranschaulichen kann man sich dies noch einmal am folgenden, vollständigen Diagramm, das ich dem Leser nicht vorenthalten will:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_n^p \arrow[r, "\tilde{F}_a"] \arrow[ddr, "\sigma"] & \mathcal{O}_n & \\
 & \mathcal{O}_{n-1}[z_n : m]^p \arrow[u, hook] \arrow[r, dotted, "(\tilde{F}_a)|"'] \arrow[ddr, dotted] & \mathcal{O}_{n-1}[z_n : m + d] \arrow[u, hook, dotted] & \\
 & & \mathcal{O}_{U,a}^p \arrow[r, "F_a"] & \mathcal{O}_{U,a} \arrow[uul, "\tau"'] \\
\mathcal{O}(U)^p \arrow[r, "F"] \arrow[urr, "\sigma"] & \mathcal{O}(U) \arrow[urr, "\tau"] & \mathcal{O}_{V,a'}[z_n - a_n : m]^p \arrow[u, hook, dashed] \arrow[r, dashed, "(F_a)|=(F|)_a"] & \mathcal{O}_{V,a'}[z_n - a_n : m + d] \arrow[u, hook] \arrow[d, "\psi_a"] \arrow[uul, dotted] \\
\mathcal{O}(V)[z_n : m]^p \arrow[u, hook] \arrow[r, "F|"] \arrow[urr, dashed] & \mathcal{O}(V)[z_n : m + d] \arrow[u, hook] \arrow[d, "\psi"] \arrow[urr] & \mathcal{O}_{V,a'}^{mp} \arrow[u, dashed, "\varphi_a"] \arrow[r, dashed, "(\tilde{F}|)_a"] & \mathcal{O}_{V,a'}^{m+d} \\
\mathcal{O}(V)^{mp} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\tilde{F}|"] \arrow[urr, dashed] & \mathcal{O}(V)^{m+d} \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Nun bleibt also nur noch der Induktionsanfang zu zeigen. Wieso also gilt die Aussage für $n = 1$?

Hier muss man sich nur vergewissern, dass der Beweis des Induktionsschlusses auch im Fall $n = 1$ sinnvoll auf eine bekannte Aussage zurückgeführt werden kann. Dazu setzen wir $\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}_{V,a'} = \mathcal{O}_{n-1} = \mathbb{C}$. $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen $\mathbb{C}^{mp} \to \mathbb{C}^{m+d}$ haben als Vektorraumhomomorphismen zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen einen endlich erzeugten Kern und wir können die gleichen Schlüsse durchführen wie gerade eben. □

4 Anhang A - Rückführung in Schritt 3

Es bleibt noch zu klären, wieso im dritten Schritt zu Beginn angenommen werden konnte, dass die Entwicklungen der F_i im Nullpunkt normierte z_n-allgemeine Potenzreihen sind, deren Grad beschränkt ist. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor:
Zunächst wollen wir einsehen, wieso wir annehmen können, dass die Entwicklungen überhaupt z_n-allgemein sind. Nach [Fre] (Seite 14, Bemerkung 2.5) ist die Menge aller Kooridatenwechselmatrizen $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$, welche eine gegebene Potenzreihe in eine z_n-allgemeine Potenzreihe überführt, offen und dicht. Damit folgt augenblicklich, dass der Schnitt der jeweiligen Koordinatenwechsel, die das für die endlich vielen Potenzreihenentwicklungen der F_i im Nullpunkt tun, nicht leer ist (dichte Mengen schneiden offene Mengen nichtleer).
Sei nun A eine Matrix, sodass $\tilde{F}_i(z) := F_i(Az)$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ im Nullpunkt z_n-allgemein ist. Wir definieren $\tilde{U} := A^{-1}U$ und sehen, dass jedes $\tilde{F}_i$ auf der offenen Menge $\tilde{U}$ holomorph ist. Wir erhalten also eine $\mathcal{O}(\tilde{U})$-lineare Abbildung

$$\tilde{F} : \mathcal{O}(\tilde{U})^p \to \mathcal{O}(\tilde{U}),\ (G_1, \dots, G_p) \mapsto \tilde{F}_1 G_1 + \cdots + \tilde{F}_p G_p.$$

Wir wollen einsehen, dass wir $\tilde{F}$ anstatt von F untersuchen können. Angenommen, wir hätten (nach eventueller Verkleinerung von $\tilde{U}$ und entsprechend U) mit $\{\tilde{f}^{(1)}, \dots, \tilde{f}^{(k)}\}$ ein endliches Erzeugendensystem des Kernsystems von $\tilde{F}$ gefunden. Dann bleibt ist es pure Rechenarbeit, nachzuweisen, dass $\{f^{(1)}, \dots, f^{(k)}\}$ ein Erzeugendensystem des Kernsystems von F ist, wenn wir $f^{(i)}(z) := \tilde{f}^{(i)}(A^{-1}z)$ definieren.

Wieso können wir nun sogar annehmen, dass die Entwicklungen der F_i im Nullpunkt (die von nun an z_n-allgemein sind) sogar normierte Polynome in z_n sind? Wir zeigen dazu, dass wir Schritt für Schritt die Entwicklungen zu Weierstraßpolynomen machen können. An F_1 führen wir den Vorgang vor:
Die Entwicklung $F_{1,0}$ von F_1 im Nullpunkt erlaubt nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz eine Zerlegung

$$F_{1,0} = T_0 Q_0,\quad Q \in \mathcal{O}(V),\quad T \in \mathcal{O}(V'),$$

wobei V, V' offene Mengen sind, die den Nullpunkt enthalten sowie Q_0 ein Weierstraßpolynom und T_0 eine Einheit. Wir verkleinern U, V und V' so weit, dass wir $U = V = V'$ haben und so, dass T dort keine Nullstellen hat. Das hat den Zweck, dass T dann global invertierbar ist. Wir verkleinern U noch weiter, sodass die Beziehung $F_1 = TQ$ sogar global gilt, und somit auch als Gleichung der Keime für jedes $a \in U$. Nun definieren wir $\tilde{F} := (Q, F_2, \dots, F_p)$ und nehmen an, dass diese Abbildung bereits ein endlich erzeugtes Kernsystem hat. Falls wir daraus folgern können, dass dies auch für F gilt, sind wir fertig. Wir können dann nämlich einfach mit den selben Argumenten F_2, F_3 usw. durch Funktionen ersetzen, deren Entwicklungen im Nullpunkt Weierstraßpolynome sind.
Sei also $\{\tilde{f}^{(1)}, \dots, \tilde{f}^{(k)}\}$ ein Erzeugendensystem des Kernsystems von $\tilde{F}$. Wir definieren $f^{(i)}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ durch

$$f_1^{(i)} = T^{-1}\tilde{f}_1^{(i)}, \quad f_j^{(i)} = \tilde{f}_j^{(i)}, \quad \text{falls} \quad j \geq 2,$$

und man weist wie im okaschen Lemma nach, dass diese Funktionen das Kernsystem von F erzeugen. Hier ist es nun noch einfacher als im Fall der $P^{(i)}$, die im okaschen Lemma auftauchten, da wir nicht aufpassen müssen, dass bestimmte Gradbedingungen erfüllt sind. Das beendet den Beweis der Rückführung. □

Vielleicht fragt sich der Leser, wieso wir uns im okaschen Lemma noch ein weiteres mal die Mühe machen müssen, auf Weierstraßpolynome zurückzuführen, wenn wir sie doch hier scheinbar schon gefunden haben. Man beachte aber, dass die Entwicklungen, die im okaschen Lemma betrachtet werden, in Wahrheit Entwicklungen der F_i in einem von Null verschiedenen Punkt $a \in U$ sind, was dadurch verschleiert wird, dass man sich abstrakt auf die analytische Algebra $\mathcal{O}_n$ zurückzieht. Wenn die Entwicklung von F_i in 0 ein Weierstraßpolynom ist, bleibt das im allgemeinen für ein anderes $a \in U$ nicht erhalten (man betrachte als triviales Beispiel $F_i(z) = z_n$).

Literatur

[Fre] Eberhard Freitag. *Lokale Funktionentheorie (Vorlesungsskript).*

[MFA] I. G. MacDonald M. F. Atiyah. *Introduction to Commutative Algebra.* Westview Press, 1994.