Der Satz von Max Noether

Leon Lang

30.10.2014

1 Anzahl von Singularitäten

Im letzten Vortrag wurde der Satz von Bézout bewiesen, der den Grad zweier algebraischer Kurven in Verbindung mit der Gesamtzahl ihrer Schnittpunkte (mit Vielfachheiten gerechnet) bringt. Diesen Satz wollen wir nun anwenden, um herauszufinden, wie viele Singularitäten eine irreduzible Kurve maximal haben kann. Sei dazu F eine irreduzible Kurve vom Grad n (in der gesamten Ausarbeitung sind alle Kurven, sofern keine anderen Annahmen gemacht werden, eben und projektiv). Ohne Einschränkung sei $F_X \neq 0$, sonst nummerieren wir einfach die Variablen um. Beachte, dass immer mindestens eine der partiellen Ableitungen nicht verschwindet, siehe [Ful] (S. 54, Aufgabe 5.8).

Lemma 1.1 *Es ist* $\sum_{P\in\mathbb{P}^2} m_P(F)(m_P(F)-1) \leq n(n-1)$.

Beweis Da F_X nicht verschwindet, ist es vom Grad $n-1$. Da F irreduzibel ist, ist F_X damit teilerfremd zu F. Nach Korollar 1 zum Satz von Bézout hat man daher

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^2} m_P(F)m_P(F_X) \leq n(n-1)$$

Wir sind also fertig, wenn wir $m_P(F_X) \geq m_P(F)-1$ nachweisen können. Da die Vielfachheit einer Kurve in einem Punkt bei einem projektiven Koordinatenwechsel invariant bleibt, können wir ohne Einschränkung $P = [0:0:1]$ annehmen. Dann ist $m_{(0,0)}(F_*) = m_P(F)$ und $m_{(0,0)}((F_X)_*) = m_P(F_X)$, und es folgt mit $r := m_{(0,0)}(F_*) = m_P(F)$:

$$F_*(X,Y) = a_rF_r(X,Y) + a_{r+1}F_{r+1}(X,Y) + ... + a_nF_n(X,Y)$$

mit $a_i \in k$, $a_r \neq 0$ und F_j homogen vom Grad j. Offenbar kann dann aber $(F_X)_* = (F_*)_X$ keinen nichtverschwindenden homogenen Summanden von geringerem Grad als $r-1$ haben und es folgt $m_P(F_X) = m_{(0,0)}((F_*)_X) \geq r-1 = m_{(0,0)}(F_*)-1 = m_P(F)-1$. □

Korollar 1.2 *Bezeichnet F_{sing} die singulären Punkte auf der irreduziblen Kurve F, d.h. diejenigen Punkte mit Vielfachheit größer eins, so ist $\#F_{sing} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.*

Beweis Es ist $P \in F_{\text{sing}}$ genau dann, wenn $m_P(F) \geq 2$, also genau dann, wenn $m_P(F)(m_P(F)-1) \geq 2$. Daher folgt aus dem Lemma

$$\#F_{\text{sing}} \leq \frac{1}{2}\sum_{P\in F_{\text{sing}}} m_P(F)(m_P(F)-1) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

□

Wir haben also eine erste einfache Abschätzung für die Anzahl der Singulariäten einer irreduziblen Kurve. Um ein Beispiel zu geben und ein Gefühl dafür zu bekommen, ob diese Abschätzung scharf ist, wollen wir nun die irreduziblen projektiven Kurven vom Grad 2 klassifizieren. Dabei nennen wir zwei Kurven äquivalent, wenn sie durch einen projektiven Koordinatenwechsel ineinander überführbar sind. Dies ist ein sinnvoller Äquivalenzbegriff, weil dabei alle lokalen Eigenschaften der Kurve erhalten bleiben (siehe Ende von §4.2 in [Ful]).

Beispiel Bis auf Äquivalenz gibt es nur eine irreduzible Kurve vom Grad 2, und zwar $YZ = X^2$, die (projektive) Normalparabel. Sie ist nichtsingulär und erfüllt daher

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^2} m_P(F)(m_P(F) - 1) = 0 < 2 = 2(2-1)$$

Die Abschätzung aus Lemma 1.1 und Korollar 1.2 scheint also verbessert werden zu können.

Beweis Sei F eine irreduzible Kurve vom Grad 2. Es ist zu zeigen, dass es einen projektiven Koordinatenwechsel $T = (T_1, T_2, T_3) : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ gibt mit $F^T := F(T_1, T_2, T_3) = YZ - X^2$.
Zunächst folgt aus Korollar 1.2, dass F maximal eine Singularität hat. Da F unendlich viele Punkte enthält, gibt es also einen Punkt $P \in F$ mit $m_P(F) = 1$. Sei L die Tangente von F an P. Da es einen projektiven Koordinatenwechsel T mit $T([0:1:0]) = P$ und $L^T = Z$ gibt (siehe [Ful] (S.48, Aufgabe 4.13)), können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $P = [0:1:0]$ und dass $L = Z$ die Tangente von F an P ist.
Wir schreiben nun

$$F = aYZ - bX^2 - cXZ - dZ^2 + eXY + fY^2 \ \ ; \ a, b, c, d, e, f \in k$$

Wir zeigen zunächst $e = f = 0$ und $a, b \neq 0$:
Es ist $0 = F(P) = F([0:1:0]) = f \cdot 1^2 = f$, also $f = 0$.
Nach [Ful] (S.54, Aufgabe 5.4) ist die (eindeutige) Tangente von F an P durch das Polynom $F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z$ gegeben. Sie ist aber auch durch Z definiert, also ist $F_X(P) = F_Y(P) = 0$. Es ist $F_X = -2bX - cZ + eY$ und somit $0 = F_X(P) = e$.
Es folgt

$$F = aYZ - bX^2 - cXZ - dZ^2$$

und die Dehomogenisierung bzgl. Y lautet

$$F_* = aZ - bX^2 - cXZ - dZ^2$$

Wäre nun $a = 0$, dann wäre $m_P(F) = m_{(0,0)}(F_*) = 2$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Also ist $a \neq 0$. Wäre $b = 0$, so wäre $F = Z(aY - cX - dZ)$ reduzibel – aber F ist irreduzibel. Somit ist auch $b \neq 0$.
Ausgerüstet mit diesem Wissen über F suchen wir jetzt einen projektiven Koordinatenwechsel T mit $F^T = YZ - X^2 - c'XZ - d'Z^2$. Man überzeugt sich davon, dass $T = (T_1, T_2, T_3)$ mit $T_1 = \frac{1}{\sqrt{b}}X$, $T_2 = \frac{1}{a}Y$ und $T_3 = Z$ dies erfüllt (beachte $a \neq 0 \neq b$). Ohne Einschränkung ist also im Folgenden

$$F = YZ - X^2 - cXZ - dZ^2.$$

Setzt man schließlich $T = (X, Y + cX + dZ, Z)$, so ist T ein projektiver Koordinatenwechsel (denn die Determinante der zugehörigen linearen Abbildung $k^3 \to k^3$ verschwindet nicht) und erfüllt offenbar $F^T = YZ - X^2$.
Wieso ist diese Kurve nun nichtsingulär? Sei dazu $P = [a:b:c] \in F$ und zum Beispiel

$c \neq 0$, also ohne Einschränkung $c = 1$. Wir müssen dann $m_P(F) = m_{(a,b)}(F_*) = 1$ zeigen. Es ist $F_* = Y - X^2$ und somit $b = a^2$. Mit $T = (X + a, Y + a^2)$ bleibt also $m_{(0,0)}((F_*)^T) = 1$ zu zeigen. Es ist aber

$$F_*(X + a, Y + a^2) = Y + a^2 - (X^2 + 2aX + a^2) = Y - 2aX - X^2.$$

Der niedrigste homogene Anteil von $(F_*)^T$ ist $Y - 2aX$, also vom Grad 1. Das zeigt die Behauptung. Für $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ läuft die Argumentation analog. □

Motiviert durch dieses Beispiel wollen wir das Ergebnis aus dem Lemma verschärfen. Wir skalieren dazu die Ungleichung (etwa wie in Korollar 1.2) mit dem Faktor $\frac{1}{2}$:

Theorem 1.3 *Sei F eine irreduzible Kurve vom Grad n. Für $P \in \mathbb{P}^2$ bezeichne $m_P = m_P(F)$. Dann ist*

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^2} \frac{m_P(m_P - 1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Bemerkung Man beachte, dass wir im Falle $n = 2$ tatsächlich $\sum m_P(m_P - 1) = 0$ erhalten und die Ungleichung daher scharf ist. Damit sieht man erneut, dass jede irreduzible Kurve vom Grad 2 nichtsingulär ist.

Beweis Sei $r := \frac{(n-1)(n-1+3)}{2} - \sum \frac{m_P(m_P-1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} - \sum \frac{m_P(m_P-1)}{2} \geq 0$ (siehe Lemma 1.1). Wir wählen dann r paarweise verschiedene einfache Punkte $Q_1, ..., Q_r \in F$ (im Falle $r = 0$ wählen wir nichts). Seien $P_1, ..., P_s$ die (nach dem Lemma endlich vielen) singulären Punkte von F. Wie in [Ful] (§ 5.2) sei wieder $V(d; r_1 S_1, \ldots, r_l S_l) = \{\text{Kurven } G \text{ vom Grad } n : m_{S_i}(G) \geq r_i\}$. Wir behaupten, dass

$$V := V(n-1; Q_1, \ldots, Q_r, (m_{P_1} - 1)P_1, \ldots, (m_{P_s} - 1)P_s) \neq \emptyset$$

Angenommen diese Behauptung ist wahr, und G wäre so ein Polynom vom Grad $n - 1$ mit $m_{Q_i}(G) \geq 1$, $m_{P_i}(G) \geq m_{P_i} - 1$. Da G vom Grad $n - 1$ und F irreduzibel ist, folgt mit Korollar 1 zum Satz von Bézout (man beachte in der letzten Umformung: $m_P(m_P - 1) = 0$ für $P \notin \{P_1, ..., P_s\}$):

$$n(n-1) \geq \sum_{P \in \mathbb{P}^2} m_P m_P(G) \geq \sum_{i=1}^{r} m_{Q_i} m_{Q_i}(G) + \sum_{i=1}^{s} m_{P_i} m_{P_i}(G)$$

$$\geq r + \sum_{i=1}^{s} m_{P_i}(m_{P_i} - 1) = r + \sum_{P \in \mathbb{P}^2} m_P(m_P - 1).$$

Substituiert man in dieser Ungleichung den Wert für r, so erhält man die Aussage des Theorems.
Nun zum Beweis der obigen Behauptung: Aus Vortrag 2 wissen wir

$$\dim(V) \geq \frac{(n-1)(n-1+3)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{2 \cdot 1}{2} - \sum_{i=1}^{s} \frac{m_{P_i}(m_{P_i} - 1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-1+3)}{2} - r - \sum_{P \in \mathbb{P}^2} \frac{m_P(m_P - 1)}{2} = 0$$

Beachte (siehe [Ful] (S. 48, Aufgabe 4.11)), dass damit tatsächlich $V \neq \emptyset$ folgt. □

Natürlich folgt aus diesem Theorem auch, dass Geraden nichtsingulär sind (ein Resultat, dass man auch leicht elementar hätte zeigen können). Wegen $\frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1$ hat eine irreduzible Kurve vom Grad 3 maximal eine Singularität und zwar höchstens mit Vielfachheit 2. Eine Kurve vom Grad 4 hat dann maximal einen Punkt mit Vielfachheit 3 oder maximal drei Punkte mit Vielfachheit 2 (aber nicht beides zugleich).

Bemerkung Für keinen Grad n kann das Theorem verschärft werden. Genauer: Das Polynom $F = X^n + Y^{n-1}Z$ ist nach dem Satz von Gauß irreduzibel und hat in $Q = [0 : 0 : 1]$ Vielfachheit $m_Q = m_Q(F) = n - 1$. Es erfüllt daher

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{m_Q(m_Q - 1)}{2} \leq \sum_{P \in \mathbb{P}^2} \frac{m_P(m_P - 1)}{2}.$$

Beweis Es ist $m_Q = m_{(0,0)}(F_*) = m_{(0,0)}(Y^{n-1} + X^n) = n - 1$ nach Definition der projektiven, und dann der affinen Vielfachheit. □

Nun folgt die Formulierung und ein Beweis der Übungsaufgabe 5.26 in [Ful] (S. 60). Sie wird unter anderem in den Vorträgen zum Thema Auflösung von Singularitäten benötigt.

Proposition 1.4 *Sei $\mathrm{char}(k) = 0$ und F eine irreduzible Kurve vom Grad n in $\mathbb{P}^2$. Sei $P \in \mathbb{P}^2$ und $m_P = m_P(F) = r \geq 0$. Für alle bis auf endlich viele Geraden L durch P gilt dann: L schneidet F außer in P noch in $n - r$ weiteren, paarweise verschiedenen Punkten.*

Beweis Die Idee ist, diejenigen Geraden L durch P zu betrachten, welche weder Tangente irgend eines Punktes auf F sind, noch eine Singularität von F (außer evtl. P) schneiden. Es liegt dann nahe, dass L genau $n - r$ Punkte außer P schneidet (siehe Regeln der Schnittzahl und Satz von Bézout) und es bleibt dann nur noch zu zeigen, dass die Menge der sonstigen Geraden durch P endlich ist.
Zuerst ein paar Bezeichnungen: F_{sing} sei die Menge der Singularitäten auf F, B_P die Menge der Punkte $Q \neq P$ mit Vielfachheit 1 auf F, sodass die Gerade durch P und Q die eindeutige Tangente von F an Q ist.
Ist L eine Gerade durch P, mit $L \cap [(F_{\mathrm{sing}} \setminus \{P\}) \cup B_P] = \emptyset$ und sodass L keine Tangente von F an P ist, so müssen wir nach der Motivation zeigen: $\#[(F \cap L) \setminus \{P\}] = n - r$.
L hat keinen irreduziblen Faktor mit F gemeinsam, sonst wäre nach den Rechenregeln der Schnittzahl $I(P, F \cap L) = \infty > m_p(F)$, was ein Widerspruch dazu ist, dass L keine Tangente von F an P ist. Daher folgt direkt aus dem Satz von Bézout: $\sum_{Q \in \mathbb{P}^2} I(Q, F \cap L) = \deg(F)\deg(L) = n \cdot 1 = n$.
Daraus und aus $I(P, F \cap L) = m_P(F) = r$ (denn L ist keine Tangente von F an P) erhalten wir: $\sum_{Q \in \mathbb{P}^2 \setminus \{P\}} I(Q, F \cap L) = n - r$. Sei $Q \in (F \cap L) \setminus \{P\}$. Per Definition von L ist dann $Q \notin F_{\mathrm{sing}}$. Außerdem ist $Q \notin B_P$ und daher L keine Tangente von F an Q. Also ist $I(Q, L \cap F) = m_Q(F) = 1$. Es folgt

$$\#[(F \cap L) \setminus \{P\}] = \sum_{Q \in (F \cap L) \setminus \{P\}} 1 = \sum_{Q \in (L \cap F) \setminus \{P\}} I(Q, F \cap L) = \sum_{Q \in \mathbb{P}^2 \setminus \{P\}} I(Q, F \cap L) = n - r$$

Es bleibt die zweite Behauptung der Motivation zu zeigen, d.h. dass die Menge der sonstigen Geraden durch $P = [p_1 : p_2 : p_3]$ endlich ist. Dazu genügt es, die Endlichkeit von $B_P \cup F_{\mathrm{sing}}$ nachzuweisen, da es jeweils nur eine Gerade durch zwei festgelegte Punkte gibt. Nun hat sich F_{sing} schon als endlich herausgestellt, sodass die Endlichkeit von B_P zu zeigen bleibt.

Sei dazu $G := p_1 F_X + p_2 F_Y + p_3 F_Z$. Wir behaupten $B_P \subseteq F \cap G$:
Sei $Q \in B_P$. Die Tangente L von F an Q ist gegeben durch die Gleichung $F_X(Q)X + F_Y(Q)Y + F_Z(Q)Z = 0$. Per Definition liegt auch P auf L. Wir haben also $G(Q) = p_1 F_X(Q) + p_2 F_Y(Q) + p_3 F_Z(Q) = L(P) = 0$, also $Q \in F \cap G$. Aber $F \cap G$ ist endlich (denn F ist irreduzibel, F und G haben also keine gemeinsame Komponente), und somit auch B_P. □

2 Max Noethers fundamentales Theorem

Definitionen Die Elemente der freien abelschen Gruppe mit Basis $\mathbb{P}^2$ heißen *Nullzykel*. Wir können sie betrachten als formale Summen $\sum_{P \in \mathbb{P}^2} n_P P$, wobei die n_p's ganze Zahlen sind, die fast alle Null sind. Dann ist $\sum_{P \in \mathbb{P}^2} n_P P + \sum_{P \in \mathbb{P}^2} m_P P = \sum_{P \in \mathbb{P}^2} (n_P + m_P) P$.
Der *Grad* des Nullzykels $\sum n_P P$ ist definiert als die Summe der (endlich vielen) Koeffizienten, $\sum n_P$. Er heißt *positiv*, wenn $n_P \geq 0$ für alle P. Wir sagen $\sum n_P P$ ist *größer* als $\sum m_P P$, wenn $n_P \geq m_P$ für alle P. Man schreibt dann $\sum n_P P \geq \sum m_P P$.
Es seien F, G Kurven vom Grad m bzw. n ohne gemeinsame Komponenten. Wir definieren dann den *Schnittzykel $F \bullet G$* durch

$$F \bullet G = \sum_{P \in \mathbb{P}^2} I(P, F \cap G) P$$

Dies ist nach dem Satz von Bézout ein wohldefinierter positiver Nullzykel vom Grad mn.
Einige Eigenschaften der Schnittzahl übersetzen sich unmitellbar in entsprechende Eigenschaften des Schnittzykels, zum Beispiel: $F \bullet G = G \bullet F$, $F \bullet GH = F \bullet G + F \bullet H$ sowie $F \bullet (G + AF) = F \bullet G$, wenn A ein homogenes Polynom vom Grad $\deg(G) - \deg(F)$ ist.

Das Theorem von Max Noether befasst sich mit der folgenden Frage: F, G und H seien Kurven mit $H \bullet F \geq G \bullet F$, d.h. H schneidet F in einem größeren Zykel als G. Wann gibt es dann eine Kurve B mit $B \bullet F = H \bullet F - G \bullet F$, d.h. $I(P, B \cap F) = I(P, H \cap F) - I(P, G \cap F)$ für alle $P \in \mathbb{P}^2$? Man beachte, dass nach dem Satz von Bézout dazu insbesondere $\deg(B) = \deg(H) - \deg(G)$ gelten muss.

Bemerkung Angenommen, wir würden homogene Polynome A, B finden mit $H = AF + BG$. Dann löst B das obige Problem.

Beweis $H \bullet F = (AF + BG) \bullet F = BG \bullet F = B \bullet F + G \bullet F$ □

Die Frage ist nun, ob die Existenz solcher Polynome A, B wie in der Bemerkung in gewisser Weise bereits *lokal* genügt. Genauer:
Sei $P \in \mathbb{P}^2$, F, G zwei Kurven, H eine weitere Kurve. Wir sagen, dass die *Noetherbedingungen in P erfüllt* sind, falls $H_* \in (F_*, G_*) \subseteq \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$, d.h. wenn es $a, b \in \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$ gibt mit $H_* = aF_* + bG_*$.

Theorem 2.1 ***(Max Noethers fundamentales Theorem)***
Es seien F, G, H projektive ebene Kurven und F, G haben keine gemeinsame Komponente. Dann gibt es eine Gleichung $H = AF + BG$ (mit A, B homogenen Polynomen vom Grad $\deg(H) - \deg(F)$ bzw. $\deg(H) - \deg(G)$) genau dann, wenn die Noetherbedingungen in jedem Punkt $P \in F \cap G$ erfüllt sind.

Beweis Ist $H = AF + BG$, dann ist $H_* = A_*F_* + B_*G_*$ in jedem $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$, was sofort die eine Richtung zeigt.
Wir nehmen umgekehrt an, dass in jedem Punkt $P \in F \cap G$ die Noetherbedingungen erfüllt sind. $F \cap G$ ist endlich, weswegen es Geraden L gibt, die $F \cap G$ nicht schneidet (man wähle einen Punkt $P \notin F \cap G$. Maximal $\#(F \cap G)$ Geraden durch P schneiden $F \cap G$ – aber von P gehen unendlich viele Geraden aus!). Wenn wir mit einem projektiven Koordinatenwechsel die Punkte von Z auf die Punkte von L abbilden, können wir also ohne Einschränkung $V(F, G, Z) = \emptyset$ annehmen.
Wir können daher für jedes $P \in F \cap G$ wählen: $F_* = \frac{F}{Z^{\deg(F)}}$ (Für G und H entsprechend). Die Noetherbedingungen sagen nun aus, dass $\overline{H_*} = 0 \in \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)/(F_*, G_*)$ für alle $P = [p_1 : p_2 : 1] \in F \cap G$, oder – unter dem kanonischen Isomorphismus $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)/(F_*, G_*) \cong \mathcal{O}_{(p_1,p_2)}(\mathbb{A}^2)/(F_*, G_*)$ (siehe [Ful] (Ende von §4.3)) – dass $\overline{H_*} = 0 \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F_*, G_*)$ und zwar für alle $P = (p_1, p_2) \in F_* \cap G_*$. Hier sind nun eleganterweise $H_* = H(X, Y, 1)$, $F_* = F(X, Y, 1)$ und $G_* = G(X, Y, 1)$ die echten Dehomogenisierungen. Da jedoch nach Proposition 6 aus §2.9 ein kanonischer Isomorphismus

$$k[X, Y]/(F_*, G_*) \cong \prod_{P \in F_* \cap G_*} \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F_*, G_*)$$

besteht, folgt $\overline{H_*} = 0 \in k[X, Y]/(F_*, G_*)$, also $H_* = aF_* + bG_*$ für $a, b \in k[X, Y]$. Nach [Ful] (S. 24, Proposition 5) gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ (genügend groß), sodass $Z^N H = AF + BG$ mit $A, B \in k[X, Y, Z]$. Nun ist aber nach dem Beweis vom Satz von Bézout Multiplikation mit $\overline{Z}$ (und damit auch mit $\overline{Z^N}$) in $k[X, Y, Z]/(F, G)$ injektiv, d.h. es ist bereits $H \in (F, G)$, also $H = A'F + B'G$. Hierbei sind aber A' und B' nicht zwangsläufig homogen. Schreibt man aber $A' = \sum A'_i$, $B' = \sum B'_i$, wobei A'_i, B'_i homogene Polynome vom Grad i sind, so sieht man durch Vergleich beider Seiten (beachte: H ist homogen!) die Gleichheit $H = A'_s F + B'_t G$ mit $s = \deg(H) - \deg(F)$, $t = \deg(H) - \deg(G)$ und somit die Behauptung. □

Wir suchen nun nach Kriterien, die uns garantieren, dass die Noetherbedingungen in einem Punkt P erfüllt sind:

Proposition 2.2 *F, G und H seien ebene Kurven, $P \in F \cap G$. Die Noetherbedingungen folgen dann aus jeder der drei folgenden Bedingungen:*

1. *F und G schneiden sich transversal in P (d.h. $m_P(F) = m_P(G) = 1$ und die eindeutigen Tangenten von F und G in P sind verschieden) und $P \in H$.*
2. *P ist ein einfacher Punkt auf F und $I(P, H \cap F) \geq I(P, G \cap F)$.*
3. *F und G haben keine gemeinsamen Tangenten in P und $m_P(H) \geq m_P(F) + m_P(G) - 1$.*

Beweis

1. Diese Bedingung ist ein Spezialfall von 2 (und auch von 3), denn:
Da F und G sich transversal in P schneiden ist per Definition P ein einfacher Punkt von F. Wegen $P \in H$ ist außerdem $I(P, H \cap F) \geq m_P(H)m_P(F) \geq 1 = I(P, G \cap F)$. Ähnlich sieht man auch, dass aus 1 die Bedingung 3 folgt. Wir können uns also auf die Fälle 2 und 3 beschränken.

2. Da P auf F ein einfacher Punkt ist, ist $\mathcal{O}_P(F)$ ein diskreter Bewertungsring und es folgt aus Eigenschaft (8) der Schnittzahlen

$$\mathrm{ord}_P^F(H) = I(P, H \cap F) \geq I(P, G \cap F) = \mathrm{ord}_P^F(G),$$

also ist $\overline{H_*} \in (\overline{G_*}) \subseteq O_P(F)$. Wegen der kanonischen Isomorphie $O_P(F)/(\overline{G_*}) \cong O_P(\mathbb{P}^2)/(F_*, G_*)$ (siehe [Ful] (S. 26, Aufgabe 2.44)) ist dann also $\overline{H_*} = 0 \in O_P(\mathbb{P}^2)/(F_*, G_*)$, d.h. die Noetherbedingungen sind in P erfüllt.

3. Durch einen projektiven Koordinatenwechsel können wir wieder $P = [0 : 0 : 1]$ annehmen und erhalten $m_{(0,0)}(H_*) \geq m_{(0,0)}(F_*) + m_{(0,0)}(G_*) - 1$ für die ursprüngliche Definition der Dehomogenisierung. Also ist $H_* \in I^t$ mit $I = (X, Y)$ und $t := m_{(0,0)}(F_*) + m_{(0,0)}(G_*) - 1$. Im Lemma zum Beweis der Eigenschaft 5 der Schnittzahl wurde aber unter gleichen Voraussetzungen $I^t \subseteq (F_*, G_*) \subseteq O_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)$ gezeigt. Also haben wir $H_* \in (F_*, G_*) \subseteq O_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)$ und damit über den wohlbekannten Isomorphismus auch $H_* \in (F_*, G_*) \subseteq O_P(\mathbb{P}^2)$. □

Korollar 2.3 *Eine Kurve B, welche $B \bullet F = H \bullet F - G \bullet F$ erfüllt, existiert bereits, wenn eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *F und G schneiden sich in genau $\deg(F)\deg(G)$ paarweise verschiedenen Punkten und H durchläuft all diese Punkte.*
2. *Alle Punkte in $F \cap G$ sind einfache Punkte auf F und $H \bullet F \geq G \bullet F$.*

Beweis 1. Sei $P \in F \cap G$. Dann ist dort $I(P, F \cap G) \geq 1$. Nach dem Satz von Bézout folgt

$$\deg(F)\deg(G) = \sum_{P \in F \cap G} I(P, F \cap G) \geq \sum_{P \in F \cap G} 1 = \#(F \cap G) = \deg(F)\deg(G)$$

und somit $I(P, F \cap G) = 1$ für alle $P \in F \cap G$. Das heißt aber gerade, dass F und G sich nur transversal schneiden, und aus Proposition 2.2 (1) folgt, dass in jedem Punkt die Noetherbedingungen erfüllt sind. Der Rest folgt aus dem Satz von Max Noether (2.1) sowie der vorangehenden Bemerkung.

2. Proposition 2.2 (2) garantiert, dass in jedem Punkt $P \in F \cap G$ die Noetherbedingungen erfüllt sind und der Rest folgt auch hier mit dem Satz von Max Noether.

Es folgt nun eine zum Verständnis der restlichen Ausarbeitung weniger wichtige Anmerkung zu Proposition 2.2:

Bemerkung Die Voraussetzungen seien wie in Proposition 2.2 und die Noetherbedingungen seien in P erfüllt. Dann folgt umgekehrt $P \in H$ (vgl. 2.2 (1)) sowie $I(P, H \cap F) \geq I(P, G \cap F)$ (vgl. 2.2 (2)).

Beweis Ohne Einschränkung sei wieder $P = [0 : 0 : 1]$, also $H_* = aF_* + bG_*$ mit der üblichen Definition der Dehomogenisierung und $a, b \in O_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)$. Es folgt $H_*(0,0) = a(0,0)F_*(0,0) + b(0,0)G_*(0,0) = 0 + 0 = 0$ und somit auch $P \in H$.
Sei nun D ein Hauptnenner von a und b, d.h. $A := Da \in k[X, Y]$ und $B := Db \in k[X, Y]$. Wir schreiben außerdem $b = \frac{b_1}{b_2}$ mit $b_2(0,0) \neq 0$ und $D = b_2 D'$. Dann folgt

$$I((0,0), D \cap F_*) + I((0,0), H_* \cap F_*) = I((0,0), DH_* \cap F_*) = I((0,0), (AF_* + BG_*) \cap F_*)$$
$$= I((0,0), BG_* \cap F_*) = I((0,0), B \cap F_*) + I((0,0), G_* \cap F_*).$$

Wir möchten $I((0,0), H_* \cap F_*) \geq I((0,0), G_* \cap F_*)$ zeigen, oder äquivalent $I((0,0), D \cap F_*) \leq I((0,0), B \cap F_*)$. Wir haben:

$$I((0,0), D \cap F_*) = I((0,0), b_2 D' \cap F_*) = I((0,0), b_2 \cap F_*) + I((0,0), D' \cap F_*) = I((0,0), D' \cap F_*),$$

denn $b_2(0,0) \neq 0$. Analog erhält man

$$I((0,0), B \cap F_*) = I((0,0), D' \cap F_*) + I((0,0), b_1 \cap F_*).$$

Unsere Behauptung ist also äquivalent zur Tatsache $0 \leq I((0,0), b_1 \cap F_*)$. $\square$

Nun folgt eine äußerst interessante Anwendung vom Satz von Max Noether – in gewisser Weise aber auch schon vom Satz von Bézout, je nachdem, wie man die nachfolgende Proposition beweist. In [Har] (S. 18, Theorem 3.4) wird folgendes bemerkenswerte Resultat bewiesen:
Ist $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät, dann besteht der Ring der regulären Funktionen auf Y lediglich aus den konstanten Funktionen.
Im Spezialfall, dass $Y = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ eine irreduzible ebene projektive Kurve ist, folgt daraus insbesondere die folgende Proposition. Wir können sie hier aber auch seperat beweisen:

Proposition 2.4 *Es sei F eine irreduzible Kurve und $z \in k(F)$ sei in jedem Punkt $P \in F$ definiert. Dann ist bereits $z \in k$.*

Beweis Da $\Gamma_h(F)$ ein Integritätsring ist ((F) ist prim), lässt sich z eindeutig (bis auf Einheiten) als Bruch $z = \frac{\overline{H}}{\overline{G}}$ schreiben, wobei Zähler und Nenner teilerfremd sind. Dass z in P definiert ist, ist dann äquivalent zu $G(P) \neq 0$ und das gilt für alle $P \in F$. Also ist $F \cap G = \emptyset$. Wir können nun mit dem Satz von Bézout argumentieren, wonach also notwendig $0 = \deg(G) = \deg(H)$ (und somit $z \in k$) ist. Alternativ:
Die Noetherbedingungen sind trivialerweise in jedem Punkt aus $F \cap G = \emptyset$ erfüllt (denn das ist die leere Bedingung), weswegen wir eine Gleichung $H = AF + BG$ erhalten und somit:

$$\frac{\overline{H}}{\overline{G}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{G}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{G}} = \frac{\overline{B}}{1}$$

Wobei im letzten Schritt $\overline{F} = 0$ benutzt wurde. Nun muss B den gleichen Grad haben wie 1 und es folgt $z = \overline{B} \in k$. $\square$

3 Geometrische Anwendungen des Satzes von Max Noether

In diesem letzten Abschnitt geben wir einige geometrische Anwendungen des Satzes von Max Noether. Bemerkenswert ist vor allem, dass nichtsinguläre kubische Kurven – sogenannte *elliptische Kurven* – zu einer Gruppe gemacht werden können. Der Beweis der Assoziativität wird dabei wesentlich auf unseren Ergebnissen beruhen.

Proposition 3.1 *Es seien C und C' kubische Kurven, $C' \bullet C = \sum_{i=1}^{9} P_i$ (nicht alle Punkte notwendig paarweise verschieden). Q sei eine quadratische Kurve mit $Q \bullet C = \sum_{i=1}^{6} P_i$. Es seien $P_1, \ldots, P_6$ einfache Punkte auf C. Dann liegen P_7, P_8 und P_9 auf einer Geraden.*

Beweis Wir wollen verstehen, dass die Situation von Korollar 2.3 (2) vorliegt. Dabei denken wir uns $F = C$, $G = Q$ und $H = C'$. Alle Punkt auf $C \cap Q$ sind einfache Punkte von C und es gilt offensichtlich $C' \bullet C \geq Q \bullet C$. Also existiert eine Kurve B mit $B \bullet C = C' \bullet C - Q \bullet C = P_7 + P_8 + P_9$. Da C vom Grad 3 ist, sehen wir aus dem Satz von Bézout, dass B den Grad 1 haben muss. P_7, P_8 und P_9 liegen also alle auf der Geraden B. $\square$

Korollar 3.2 ***(Pascal)***
Wir nehmen an, dass die 6 *Ecken eines (nicht notwendig konvexen) Sechsecks alle auf einer irreduziblen Kurve Q vom Grad* 2 *liegen. Wir verlängern die* 6 *Seiten des Sechsecks zu Geraden. Wir nehmen an, dass keine zwei Verlängerungen aufeinanderfallen. Dann liegen die Schnittpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden.*

Beweis C bezeichne das Produkt von drei linearen Polynomen, die drei Seiten des Sechsecks (bzw. ihre Verlängerungen) definieren, von denen nicht zwei gegenüberliegend sind und auch nicht zwei benachbart. C' bezeichne analog die kubische Kurve definiert durch die drei übrigen Seiten. Nach den Voraussetzungen haben C und C' keine gemeinsamen Komponenten, es ist also nach dem Satz von Bézout $C \bullet C' = \sum_{i=1}^{9} P_i$ mit gewissen Punkten P_i.
Da Q irreduzibel ist, hat es auch keine gemeinsame Komponente mit C. Es ist also – wieder nach Bézout – $Q \bullet C = \sum_{i=1}^{6} Q_i$.
Die Punkte Q_i kommen nun alle unter den P_i vor und nach Umordnung können wir $Q_i = P_i$, $i = 1, 2, ..., 6$ annehmen. Da $P_1, ..., P_6$ jeweils einfache Punkt auf C sind (denn C hat die Schnittpunkte seiner Komponenten nicht auf Q) sind also die Voraussetzungen von Proposition 3.1 erfüllt: P_7, P_8 und P_9 liegen auf einer Geraden. Dies sind gerade die übrigen Schnittpunkte von gegenüberliegenden Seiten. □

Korollar 3.3 ***(Pappus)***
Es seien L_1, L_2 zwei voneinander verschiedene Geraden und $P_1, P_2, P_3 \in L_1$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in L_2$ paarweise verschiedene Punkte, wobei keine der Punkte im Schnitt der Geraden liegen sollen. Es sei L_{ij} die eindeutige Gerade zwischen P_i und Q_j. Wir definieren nun die drei Punkte $R_1 = L_{23} \bullet L_{32}$, $R_2 = L_{13} \bullet L_{31}$ und $R_3 = L_{12} \bullet L_{21}$. Dann liegen die Punkte R_1, R_2 und R_3 auf einer Geraden.

Beweis Wir bilden die kubischen Kurven $C = L_{12}L_{23}L_{31}$ sowie $C' = L_{21}L_{32}L_{13}$ und $Q = L_1L_2$. Die drei Punkte, die in $C \cap C'$, jedoch nicht in $Q \cap C$ liegen, sind genau die Punkte R_1, R_2 und R_3. Die Punkte aus $Q \cap C$ sind außerdem einfache Punkte auf C. Wir wenden Proposition 3.1 an und erhalten, dass R_1, R_2 und R_3 auf einer Geraden liegen. □

Proposition 3.4 *Es sei C eine irreduzible kubische Kurve und C', C'' seien beliebige kubische Kurven. Es sei $C' \bullet C = \sum_{i=1}^{9} P_i$, und die P_i seien einfache Punkte auf C (aber nicht notwendig paarweise verschieden) und es sei $C'' \bullet C = \sum_{i=1}^{8} P_i + Q$. Dann ist $Q = P_9$.*

Beweis Es sei L eine Gerade durch P_9, also $L \bullet C = P_9 + R + S$. Nach Proposition 1.4 kann $R \neq S$ angenommen werden. Wir haben

$$LC'' \bullet C = L \bullet C + C'' \bullet C = \sum_{i=1}^{9} P_i + Q + R + S$$

und nach Voraussetzung $C' \bullet C = \sum_{i=1}^{9} P_i$. Wir denken uns in Anlehnung an Korollar 2.3 (2): $H = LC''$, $F = C$, $G = C'$. Dann sind die Voraussetzungen erfüllt und es existiert eine Kurve B mit

$$B \bullet C = LC'' \bullet C - C' \bullet C = Q + R + S.$$

Aus Gradgründen ist B nach dem Satz von Bézout eine Gerade, und B und L haben mindestens die voneinander verschiedenen Punkte R und S gemeinsam. Also ist $B = L$ und wir sehen wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von $L \bullet C$: $P_9 = Q$. □

Nun wollen wir mit unseren Methoden zeigen, dass nichtsinguläre kubische Kurven (sogenannte elliptische Kurven) eine natürliche Gruppenstruktur tragen. Für Punkte P, Q mit $P \neq Q$ gibt es eine eindeutige Gerade L, die durch beide Punkte verläuft. Nach dem Satz von Bézout ist dann $L \bullet C = P + Q + R$ mit einem dritten Punkt $R \in C$ (nicht notwendig verschieden von den anderen beiden). Ist $P = Q$, so wählen wir für L einfach die eindeutige Tangente an P (beachte: C ist nichtsingulär) und erhalten analog einen dritten Punkt $R \in C$. Wir definieren nun die Abbildung

$$\varphi : C \times C \to C, \quad \varphi(P, Q) = R,$$

wobei R wie oben aus den Punkten P und Q konstruiert wird. Dies sieht schon sehr nach einer Addition aus (Kommutativität ist beispielsweise klar), allerdings gibt es kein neutrales Element. Ist nämlich $O \in C$ beliebig, so gibt es nach Proposition 1.5 immer eine Gerade L durch O, sodass $L \bullet C = O + P + Q$ der Nullzykel dreier paarweise verschiedener Punkte ist (sogar fast alle Geraden L durch O erfüllen das). Sodann ist aber

$$\varphi(O, P) = Q \neq P,$$

sodass O kein neutrales Element bzgl. der Verknüpfung φ ist. Dies kann man folgendermaßen beheben:

Definition Es sei C eine nichtsinguläre kubische Kurve und $O \in C$ ein beliebiger, von nun an fixierter Punkt. Dann definieren wir eine Addition auf C durch

$$\oplus : C \times C \to C, \quad (P, Q) \mapsto P \oplus Q := \varphi(O, \varphi(P, Q))$$

Proposition 3.5 *C bildet zusammen mit der Verknüpfung $\oplus$ eine abelsche Gruppe.*

Beweis Die Kommutativität von $\oplus$ ist klar, da φ kommutativ ist.
Wir zeigen, dass O neutral bzgl. $\oplus$ ist. Sei dazu $P \in C$ beliebig und L die Gerade durch P und O, also $L \bullet C = O + P + Q$ mit einem $Q \in C$. Dann ist aber

$$P \oplus O = \varphi(O, \varphi(O, P)) = \varphi(O, Q) = P,$$

also ist O ein neutrales Element.
Sei nun $P \in C$ wieder beliebig. Wir wollen ein inverses Element finden. Sei dazu $R = \varphi(O, O)$ und $Q = \varphi(P, R)$. Dann folgt:

$$P \oplus Q = \varphi(O, \varphi(P, \varphi(P, R))) = \varphi(O, R) = \varphi(O, \varphi(O, O)) = O,$$

also ist Q invers zu P.
Zu zeigen ist also noch die Assoziativität. Hierbei spielen unsere Methoden eine wichtige Rolle. Seien $P, Q, R \in C$. Wir wollen also $(P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R)$ zeigen. Es sei L_1 die eindeutige Gerade, sodass $L_1 \bullet C = P + Q + S'$ für ein $S' \in C$ (natürlich sei wieder L die Tangente an P im Falle $P = Q$). Wir wählen analog in der folgenden Reihenfolge Geraden M_1, L_2, M_2, L_3 und M_3, welche folgende Gleichungen erfüllen:

$$M_1 \bullet C = O + S' + S$$

$$L_2 \bullet C = S + R + T'$$

$$M_2 \bullet C = Q + R + U'$$

$$L_3 \bullet C = O + U' + U$$
$$M_3 \bullet C = P + U + T''$$

Nun ist $S' = \varphi(P, Q)$, $S = \varphi(O, S') = P \oplus Q$ und somit

$$T' = \varphi(S, R) = \varphi(P \oplus Q, R)$$

Ganz genauso sieht man: $T'' = \varphi(P, Q \oplus R)$. Daher ist

$$(P \oplus Q) \oplus R = \varphi(O, T'); \;\; P \oplus (Q \oplus R) = \varphi(O, T'').$$

Für die Assoziativität genügt es also $T' = T''$ zu zeigen. Wir definieren dazu die beiden kubischen Kurven $C' = L_1L_2L_3$ und $C'' = M_1M_2M_3$. Es ist

$$C' \bullet C = P + Q + S' + O + U' + U + S + R + T'$$

$$C'' \bullet C = P + Q + S' + O + U' + U + S + R + T''.$$

Beachte, dass alle auftretenden Punkte einfach auf C sind, denn C ist nichtsingulär. Daher folgt aus Proposition 3.4 die Gleichheit $T' = T''$. □

Literatur

[Ful] William Fulton. *Algebraic Curves*. Benjamin-Cummings Publishing Co., 1969.

[Har] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.