Affine Varietäten

Leon Lang

10.07.2014

1 Konstruktion der Zariski Topologie

Bezeichnungen Im gesamten Vortrag ist k ein fester, algebraisch abgeschlossener Körper. $\mathbb{A}_k^n$ (oder einfacher $\mathbb{A}^n$) bezeichne den n-dimensionalen affinen Raum über k, d.h. den Raum aller n-Tupel von Elementen aus k. Dieser Raum wird später mit einer Topologie versehen und daher bewusst vom Vektorraum k^n unterschieden. Elemente $P \in \mathbb{A}^n$ bezeichnen wir als Punkte, und für $P = (a_1, ..., a_n)$ heißen die a_i die Koordinaten von P.
Es sei $A = k[x_1, ..., x_n]$ der Polynomring in n Variablen über k. Wir interpretieren die Elemente aus A als Funktionen von $\mathbb{A}^n$ nach k: Ist $f \in A$ und $P \in \mathbb{A}^n$, dann definieren wir $f(P) = f((a_1, ..., a_n)) := f(a_1, ..., a_n)$.

Definition Ist nun $f \in A$ ein Polynom, so sei $Z(f) := \{P \in \mathbb{A}^n | f(P) = 0\}$ seine Nullstellenmenge.
Allgemeiner: Sei T eine beliebige Teilmenge von A, so definieren wir die Nullstellenmenge von T als die Menge gemeinsamer Nullstellen aller Polynome aus T, d.h.:

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n | f(P) = 0, f \in T\}$$

Bemerkung Ist $\mathfrak{a}$ das Ideal, dass von T erzeugt wird, dann ist $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$.
Da A ein noetherscher Ring ist, hat jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ein endliches Erzeugendensystem $f_1, ..., f_r$. Mit der ersten Aussage folgt daher $Z(T) = Z(\mathfrak{a}) = Z(f_1, ..., f_r)$, d.h. $Z(T)$ lässt sich immer als die gemeinsame Nullstellenmenge endlich vieler Polynome schreiben.

Beweis Sei $P \in Z(\mathfrak{a})$. Dann ist $f(P) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}$, und wegen $T \subseteq \mathfrak{a}$ insbesondere für alle $f \in T$. Es folgt $P \in Z(T)$.
Sei umgekehrt $P \in Z(T)$. Sei $g \in \mathfrak{a}$ beliebig. Dann ist $g = \sum_{i=1}^k g_i f_i$ mit $g_i \in A, f_i \in T$. Es folgt $g(P) = \sum_{i=1}^k g_i(P) f_i(P) = 0$. Da $g \in \mathfrak{a}$ beliebig war, ist P gemeinsame Nullstelle aller $g \in \mathfrak{a}$ und somit $P \in Z(\mathfrak{a})$.

Definition Eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt algebraisch, wenn eine Menge $T \subseteq A$ existiert, sodass $Y = Z(T)$. Algebraische Mengen sind also genau die Nullstellenmengen von endlich vielen Polynomen.

Proposition 1.1 *Die Vereinigung zweier algebraischer Mengen ist algebraisch. Der Schnitt beliebig vieler algebraischer Mengen ist algebraisch. $\emptyset$ und $\mathbb{A}^n$ sind algebraisch.*

Beweis Seien Y_1 und Y_2 algebraisch, d.h. $Y_1 = Z(T_1)$, $Y_2 = Z(T_2)$ für $T_1, T_2 \subseteq A$. Behauptung: $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$, d.h. $Y_1 \cup Y_2$ ist algebraisch (Dabei ist $T_1 T_2$ zu verstehen als die Menge aller Produkte $g_1 g_2$, wobei $g_1 \in T_1$, $g_2 \in T_2$). Sei also $P \in Y_1 \cup Y_2$, ohne Einschränkung also $P \in Y_1$. Dann ist $g_1(P) = 0$ für alle $g_1 \in T_1$. Ist dann $g_1 g_2 \in T_1 T_2$ beliebig ($g_1 \in T_1, g_2 \in T_2$), so folgt $(g_1 g_2)(P) = g_1(P) g_2(P) = 0$, also ist $P \in Z(T_1 T_2)$. Sei umgekehrt $P \in Z(T_1 T_2)$. Ist $P \in Y_1$, dann sind wir fertig. Sei also $P \notin Y_1$, d.h. es existiert $g_1 \in T_1$, sodass $g_1(P) \neq 0$. Da

aber $P \in Z(T_1T_2)$, ist $g_1(P)g_2(P) = 0$ für alle $g_2 \in T_2$. Wegen der Nullteilerfreiheit von k folgt $g_2(P) = 0$ für alle $g_2 \in T_2$. Es folgt $P \in Z(T_2) = Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2$, also die Behauptung.
Sei jetzt $\{Y_\alpha\} = \{Z(T_\alpha)\}$ eine beliebige Familie algebraischer Mengen. Man sieht unmittelbar $\bigcap Y_\alpha = Z(\bigcup T_\alpha)$, d.h. der Schnitt beliebig vieler algebraischer Mengen ist algebraisch.
Schließlich ist $\emptyset = Z(1)$ und $\mathbb{A}^n = Z(0)$ mit den konstanten Polynomen $0, 1 \in A$.

Bemerkung Sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ die Erzeugnisse von T_1 und T_2 in A, so folgt auch $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)$, denn: Ist $P \in Z(T_1) \cup Z(T_2)$, also zum Beispiel $P \in Z(T_1)$. Dann ist auch $P \in Z(\mathfrak{a}_1)$, also insbesondere $P \in Z(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)$.
Sei nun $P \in Z(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)$. Da aber $T_1T_2 \subseteq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$, ist damit auch $P \in Z(T_1T_2)$, und nach dem Beweis von Proposition 1.1 auch $P \in Z(T_1) \cup Z(T_2)$.
Dies wird uns im Beweis von Korollar 2.5 wieder begegnen. Induktiv erhält man nämlich aus dieser Bemerkung für endlich viele Ideale $\mathfrak{p}_1$, ..., $\mathfrak{p}_r$ in A die Beziehung $Z(\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i) = \bigcup_{i=1}^r Z(\mathfrak{p}_i)$.

Definition Wir definieren die Zariski Topologie auf $\mathbb{A}^n$ folgendermaßen: Die offenen Mengen in $\mathbb{A}^n$ seien genau die Komplemente der algebraischen Mengen in $\mathbb{A}^n$. Das definiert tatsächlich eine Topologie: Nach Proposition 1.4 und mit einer einfachen Anwendung der de Morganschen Regeln folgt nämlich: Der Schnitt zweier offener Mengen sowie die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen. Schließlich ist auch $\emptyset = (\mathbb{A}^n)^c$ sowie $\mathbb{A}^n = \emptyset^c$ offen.

Beispiel Die Zariski Topologie der affinen Gerade A^1 besteht genau aus der leeren Menge und den Komplementen der endlichen Mengen:
Sei nämlich $Z(T)$ mit $T \subseteq A = k[x]$ eine algebraische Menge. Dann ist $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$ für das von T erzeugte Ideal $\mathfrak{a}$. $k[x]$ ist aber ein Hauptidealring, das heißt $a = (f)$ für ein Polynom $f \in k[x]$. Folglich besteht $Z(T) = Z(f)$ genau aus den Nullstellen von f in k. Das sind entweder endlich viele, oder der gesamte Raum A^1, falls f das Nullpolynom ist. Nach Komplementbildung folgt die Behauptung.
Insbesondere sehen wir, dass diese Topologie nicht hausdorffsch ist: Da k nämlich algebraisch abgeschlossen ist, ist k unendlich. Offene, nichtleere Mengen enthalten aber nur endlich viele Elemente nicht. Daher haben alle offenen, nicht leeren Mengen aus der Topologie einen nicht leeren Schnitt.

2 affine Varietäten und Hilbert's Nullstellensatz

Erinnerung zu topologischen Grundbegriffen

Ist X ein topologischer Raum und Y ein Teilraum, dann wird auch Y mit der induzierten Topologie zu einem Topologischen Raum: Die offenen Teilmengen von Y sind dann genau die Mengen $Y \cap U$, wobei U eine offene Teilmenge von X ist (Man sagt auch: $Y \cap U$ ist offen *in* Y). Man folgert aus dieser Definition, dass die abgeschlossenen Teilmengen von Y sich analog beschreiben lassen als die Mengen $Y \cap B$, wobei B eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.
Der Abschluss von Y, $\overline{Y}$, ist der Schnitt aller abgeschlossenen Obermengen von Y und damit die kleinste abgeschlossene Menge, die Y enthält. Ist Y selbst abgeschlossen, dann ist $\overline{Y} = Y$.
Man sagt, Y liegt dicht in X, wenn der Abschluss $\overline{Y}$ bereits ganz X ist.
Eine Abbildung $X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist - äquivalent zur üblichen Definition - genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge aus Y abgeschlossen in X ist.

Definition Eine nichtleere Teilmenge Y eines topologischen Raums X heißt irreduzibel, falls sie sich nicht schreiben lässt als eine Vereinigung $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit zwei echten Teilmengen von Y, die beide in Y abgeschlossen sind.

Äquivalent hierzu ist: Sind U_1 und U_2 zwei nichtleere, offene Teilmengen von Y, so ist deren Schnitt nichtleer. Y ist reduzibel, wenn Y nicht irreduzibel ist.

Beispiel 1. $\mathbb{A}^1$ ist irreduzibel, denn ist $Y_1 \cup Y_2$ eine beliebige Vereinigung von in $\mathbb{A}_1$ abgeschlossenen Mengen, die beide echt in $\mathbb{A}_1$ enthalten sind, dann ist sowohl Y_1 als auch Y_2 endlich. $\mathbb{A}_1$ ist aber unendlich, denn k ist algebraisch abgeschlossen. Es folgt $Y_1 \cup Y_2 \neq \mathbb{A}_1$, d.h. $\mathbb{A}_1$ ist irreduzibel.

2. Sei X ein irreduzibler topologischer Raum und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X. Dann ist U irreduzibel und liegt dicht in X, denn:
   Sind U_1 und U_2 zwei nichtleere offene Teilmengen von U, so sind sie wegen der Offenheit von U auch offen in X. Da X irreduzibel ist, ist ihr Schnitt nichtleer, also ist U irreduzibel. Warum ist nun U dicht in X? Angenommen, U liegt nicht dicht in X. Da $\overline{U}$ und $X \setminus U$ abgeschlossen sind, wäre dann jedoch $X = (X \setminus U) \cup \overline{U}$ reduzibel.

3. Ist Y eine irreduzible Teilmenge von X, dann ist auch der Abschluss $\overline{Y}$ irreduzibel:
   Denn sei $\overline{Y} = A_1 \cup A_2$ mit den in X abgeschlossenen Mengen A_1, A_2 (beachte: $\overline{Y}$ ist abgeschlossen) . Dann folgt aber:

$$Y = Y \cap \overline{Y} = Y \cap (A_1 \cup A_2) = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2)$$

   Wegen der Irreduzibilität von Y ist dann zum Beispiel $Y = Y \cap A_1$, also $Y \subseteq A_1$, und wegen der Abgeschlossenheit von A_1 sogar $\overline{Y} \subseteq A_1$. Also ist $\overline{Y}$ irreduzibel.

Definition Eine affine algebraische Varietät (oder einfacher: Affine Varietät) ist eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n$ zusammen mit der induzierten Topologie. Eine offene Teilmenge einer affinen Varietät heißt quasi-affine Varietät.

Definition Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n$. Dann definiert man das Ideal von Y als die Menge

$$I(Y) = \{f \in A | f(P) = 0, P \in Y\}$$

Dies ist tatsächlich ein Ideal: Ist $f(P) = g(P) = 0$ für alle $P \in Y$ und $h \in A$ beliebig, dann ist $(f+g)(P) = f(P) + g(P) = 0$ und $(hf)(P) = h(P)f(P) = 0$ für alle P aus Y.

Grundlegende Beziehungen der Abbildungen I und Z werden in der folgenden Proposition erklärt:

Proposition 2.1 *1. Wenn $T_1 \subseteq T_2$ Teilmengen von A sind, dann ist $Z(T_2) \subseteq Z(T_1)$*

2. *Sind $Y_1 \subseteq Y_2$ Teilmengen von $\mathbb{A}^n$, dann ist $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$*

3. *Für beliebige Teilmengen Y_1, Y_2 von $\mathbb{A}^n$ ist $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$*
   Anmerkung: eine ähnliche Aussage für die Abbildung Z wurde in Proposition 1.1 bewiesen

4. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist $I(Z(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$, das Radikal von $\mathfrak{a}$*

5. *Für jede Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ ist $Z(I(Y)) = \overline{Y}$, der Abschluss von Y*

Beweis 1. Ist $P \in Z(T_2)$, dann ist $f(P) = 0$ für alle $f \in T_2$, also insbesondere für alle $f \in T_1$. Somit liegt P in $Z(T_1)$.

2. Ist $f \in I(Y_2)$, dann ist $f(P) = 0$ für alle $P \in Y_2$, also insbesondere für alle $P \in Y_1$. Somit liegt f in $I(Y_1)$.

3. $I(Y_1 \cup Y_2) = \{f \in A | f(P) = 0 \text{ für alle } P \in Y_1 \cup Y_2\}$
   $= \{f \in A | f(P) = 0 \text{ für alle } P \in Y_1 \text{ und } f(P) = 0 \text{ für alle } P \in Y_2\}$
   $= \{f \in A | f \in I(Y_1) \text{ und } f \in I(Y_2)\} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

4. Diese Aussage ist die starke Form des hilbertschen Nullstellensatzes, siehe dazu Theorem 2.2.

5. Es ist $Y \subseteq Z(I(Y))$, denn: Ist $P \in Y$, dann ist per Definition $f(P) = 0$ für jedes $f \in I(Y)$. Also ist $P \in Z(I(Y))$. Da $Z(I(Y))$ abgeschlossen ist, und $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von Y ist, folgt die Inklusion $\overline{Y} \subseteq Z(I(Y))$.
   Es bleibt also $Z(I(Y)) \subseteq \overline{Y}$ zu zeigen. Da $\overline{Y}$ der Schnitt aller abgeschlossenen Obermengen von Y ist, müssen wir zeigen: Ist W eine abgeschlossene Obermenge von Y, so ist $Z(I(Y)) \subseteq W$. Sei also so ein W gegeben. Als abgeschlossene Menge ist dann $W = Z(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Man hat $Y \subseteq W$, also nach (1.) $I(W) \subseteq I(Y)$ und nach (4.) $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a})) = I(W)$, also insgesamt die Inklusion $\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$. Wenden wir auf beiden Seiten die Abbildung Z an, so erhalten wir nach (1.) die gewünschte Inklusion $Z(I(Y)) \subseteq Z(\mathfrak{a}) = W$.

Theorem 2.2 - *Hilberts Nullstellensatz* *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A = k[x_1, ..., x_n]$, dann ist $I(Z(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$, das Radikal von $\mathfrak{a}$.*

Beweis Wir zeigen zuerst die leichte Inklusion $r(\mathfrak{a}) \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$: Ist $f \in r(\mathfrak{a})$, d.h. $f^r \in \mathfrak{a}$ für ein $r \in \mathbb{N}$, dann ist $f^r(P) = 0$ für alle $P \in Z(\mathfrak{a})$. Da k nullteilerfrei ist, folgt damit aber bereits $f(P) = 0$ für alle $P \in Z(\mathfrak{a})$, also ist $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$.
Sei nun $f \notin r(\mathfrak{a})$. Wir müssen zeigen: $f \notin I(Z(\mathfrak{a}))$, d.h. es gibt ein $x \in Z(\mathfrak{a})$, sodass $f(x) \neq 0$. Dieses x werden wir im Folgenden konstruieren:
Zunächst ist nach dem ersten Vortrag $r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, wobei der Schnitt über alle Primideale in A gebildet wird, die $\mathfrak{a}$ enthalten. Wegen $f \notin r(\mathfrak{a})$ gibt es also ein solches Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Sei $B := A/\mathfrak{p}$. Dann ist B nullteilerfrei, denn $\mathfrak{p}$ ist prim. Wir stellen uns B eingebettet in seinen Quotientenkörper $Q(B)$ vor. Wegen $f \notin \mathfrak{p}$ ist dann sein Bild $\overline{f}$ in $B \subseteq Q(B)$ nicht Null, d.h. $\overline{f}^{-1}$ ein wohldefiniertes Element von $Q(B)$. Sei $C := B[\overline{f}^{-1}]$ die von $\overline{f}^{-1}$ über B erzeugte k-Algebra. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in C und seien $\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}$ die Bilder der x_i in B. Dann ist $C = k[\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}, \overline{f}^{-1}]$ eine endlich erzeugte k-Algebra, also ebenfalls $C/\mathfrak{m}$. Da Letzteres aber sogar ein Körper ist, ist $C/\mathfrak{m}$ nach dem schwachen hilbertschen Nullstellensatz (Vortrag 6) sogar eine endliche algebraische Erweiterung von k. Da aber k algebraisch abgeschlossen ist, folgt damit $C/\mathfrak{m} \cong k$.
Sei nun ϕ die Komposition der Abbildungen von A über B, C und $C/\mathfrak{m}$ nach k. Dann ist ϕ der eindeutig bestimmte Einsetungshomomorphismus, der x_i auf $\phi(x_i)$ abbildet. Sei $x = (\phi(x_1), ..., \phi(x_n)) \in \mathbb{A}^n$. Wir wollen zeigen, dass dieses x das oben Geforderte erfüllt.
Sei also $g \in \mathfrak{a}$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq ker(\phi)$ ist $0 = \phi(g) = g(\phi(x_1), ..., \phi(x_n)) = g(x)$, also ist tatsächlich $x \in Z(\mathfrak{a})$. Sei π die Projektion von C über $C/\mathfrak{m}$ nach k. Wir wollen $f(x) = \phi(f) \neq 0$ zeigen: Es ist $1 = \pi(1) = \pi(\overline{f})\pi(\overline{f}^{-1}) = \phi(f)\pi(\overline{f}^{-1})$, also muss tatsächlich $\phi(f) \neq 0$ gelten. Das zeigt die Behauptung.

Korollar 2.3 *Es gibt eine Inklusions-umkehrende Bijektion zwischen den algebraischen Mengen Im $\mathbb{A}^n$ und Radikalidealen (d.h. Idealen, die mit ihrem Radikal übereinstimmen). Diese wird gegeben durch die zueinander inversen Abbildungen $Y \mapsto I(Y)$ und $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$.*
Eine algebraische Menge ist irreduzibel, also eine affine Varietät, genau dann, wenn ihr Ideal ein Primideal ist.

Beweis Ist $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen, dann ist nach 2.1 (5.) $Z(I(Y)) = \overline{Y} = Y$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Radikalideal, dann ist nach Hilberts Nullstellensatz $I(Z(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Also sind I und Z auf den angegebenen Mengen tatsächlich Bijektionen und Umkehrfunktionen

zueinander. Dass sie Inklusions-umkehrend sind, wurde in 2.1 (1.) und (2.) gezeigt.
Es bleibt die letzte Aussage zu zeigen. Sei dazu Y irreduzibel und algebraisch und $fg \in I(Y)$. Dann ist $Y = Z(I(Y)) \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$, d.h. $Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g))$. Wegen der Irreduzibilität ist dann $Y \subseteq Z(f)$ oder $Y \subseteq Z(g)$, d.h. $f \in I(Y)$ oder $g \in I(Y)$. Also ist $I(Y)$ prim.
Sei umgekehrt $I(Y)$ prim und eine Zerlegung $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit abgeschlossenen Mengen Y_1 und Y_2 gegeben. Dann ist $I(Y) = I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Da $I(Y)$ prim ist, ist dann aber schon $I(Y) = I(Y_1)$ oder $I(Y) = I(Y_2)$ und somit $Y = Y_1$ oder $Y = Y_2$, denn die Abbildung I ist auf algebraischen Mengen injektiv. Also ist Y irreduzibel.

Beispiel

1. $\mathbb{A}^n$ ist irreduzibel, denn es ist $I(\mathbb{A}^n) = (0)$, und (0) ist wegen der Nullteilerfreiheit von A ein Primideal.

2. Sei f ein irreduzibles Polynom in $k[x, y]$. Dann ist bekanntlich (f) ein Primideal, sodass $Y = Z(f)$ irreduzibel ist. Diese Nullstellenmenge nennt man die zur Gleichung $f(x, y) = 0$ gehörige affine Kurve. Ist f vom Grad d, dann sagt man: Y ist eine Kurve vom Grad d.

3. Ist allgemeiner f ein irreduzibles Polynom in $A = k[x_1, ..., x_n]$, wobei $n \geq 3$, so heißt die irreduzible Menge $Y = Z(f)$ eine Fläche (falls $n = 3$) bzw. eine Hyperfläche (falls $n > 3$).

4. Sei $P = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n$ ein Punkt. Wegen $\{P\} = Z(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ ist $\{P\}$ abgeschlossen. Sei nun $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dieses korrespondiert nach Korollar 2.3 zu einer minimalen irreduziblen Teilmenge Y des $\mathbb{A}^n$. Da jeder Punkt in Y selbst irreduzibel und abgeschlossen ist, muss dann $Y = \{P\}$ für einen Punkt $P \in \mathbb{A}^n$ wie oben gelten. Es folgt $\mathfrak{m} = I(P) = I(Z(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n))$. Da das Ideal $(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ zudem selbst maximal ist, folgt - wieder mit Korollar 2.3 - $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$.
Über algebraisch abgeschlossenen Körpern sind also alle maximalen Ideale von dieser besonders einfachen Gestalt.

5. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so sind diese Resultate falsch. So ist zum Beispiel $f = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Jedoch ist $Z(f) = \emptyset$ und somit $I(Z(f)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[X] \neq (f)$. Das Ideal (f) ist außerdem ein maximales Ideal (denn $\mathbb{R}[X]/(f) \cong \mathbb{C}$), welches nicht von der schönen Form in (4.) ist.
Zudem ist auch die zweite Aussage aus Korollar 2.3 über $\mathbb{R}[X, Y]$ falsch: Das irreduzible Polynom $f(X, Y) = (X^2 - 1)^2 + Y^2$ hat als Nullstellenmenge $Z(f) = \{(-1, 0)\} \cup \{(1, 0)\}$, also eine reduzible Menge.

Definition Ist $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge, Dann definiert man den affinen Koordinatenring $A(Y)$ von Y als den Ring $A/I(Y)$

Bemerkung Ist Y eine affine Varietät (also insbesondere algebraisch), dann ist $A(Y)$ ein Integritätsring, denn $I(Y)$ ist ein Primideal. Darüberhinaus ist $A(Y)$ generell eine endlich erzeugte k-Algebra. Ist umgekehrt B eine endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra (mit $1 \neq 0$), dann ist B der affine Koordinatenring einer affinen Varietät. Denn B lässt sich als Quotient von $k[x_1, ..., x_n]$ mit einem Ideal $\mathfrak{a}$ schreiben, und dieses Ideal muss dann prim sein, da B ein Integritätsring ist. Man definiert dann einfach $Y := Z(\mathfrak{a})$, was nach Korrolar 2.3 irreduzibel, also eine affine Varietät ist.

Definition Ein topologischer Raum X heißt noethersch, wenn jede absteigende Kette von abgeschlossenen Mengen stationär ist, d.h.: ist $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$ eine Sequenz abgeschlossener Teilmengen von X, so gibt es ein r mit $Y_r = Y_{r+1} = ...$

Beispiel $\mathbb{A}^n$ ist ein noetherscher topologischer Raum: Sei nämlich $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$ eine Sequenz algebraischer Mengen. Dann ist (siehe Proposition 2.1 (2)) $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq ...$ eine aufsteigende Kette von Idealen in $A = k[X_1, ..., X_n]$. Polynomringe sind aber noethersch, weswegen diese Kette stationär ist, es gibt also ein r mit $I(Y_r) = I(Y_{r+1}) = ...$ Dann folgt aber mit Korollar 2.3 (I ist injektiv auf algebraischen Mengen) $Y_r = Y_{r+1} = ...$

Proposition 2.4 *In einem noetherschen topologischen Raum X lässt sich jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge Y als eine endliche Vereinigung $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_r$ von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen Y_i schreiben. Fordern wir noch $Y_i \not\supseteq Y_j$ für $i \neq j$, dann sind die Y_i eindeutig bestimmt. Man nennt die Y_i dann die irreduziblen Komponenten von Y.*

Beweis Zuerst die Existenz einer solchen Darstellung von Y: Sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von X, die sich nicht als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen schreiben lassen. Wir müssen zeigen: $\mathfrak{S}$ ist leer.
Angenommen, $\mathfrak{S}$ ist nichtleer. Da X noethersch ist, enthält dann $\mathfrak{S}$ ein minimales Element Y. Wäre Y irreduzibel, dann wäre es seine eigene Darstellung im obigen Sinne und somit nicht in $\mathfrak{S}$. Also ist Y reduzibel und lässt sich deshalb schreiben als $Y = Y' \cup Y''$ mit zwei echten abgeschlossenen Teilmengen von Y. Diese liegen dann aber wegen der Minimalität von Y nicht mehr in $\mathfrak{S}$, haben also eine Darstellung als Vereinigung irreduzibler, abgeschlossener Mengen. Dann hat aber auch Y so eine Darstellung: Widerspruch zu $Y \in \mathfrak{S}$.
Jede abgeschlossene Menge Y lässt sich also schreiben als $Y = Y_1 \cup ... \cup Y_r$ mit Y_i wie oben. Lässt man aus so einer Darstellung alle Y_i weg, die in der Vereinigung der restlichen Y_j bereits enthalten sind, so erreicht man $Y_i \not\supseteq Y_j$ für $i \neq j$. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung:
Sei $Y = Y_1' \cup ... \cup Y_s'$ eine weitere solche Darstellung. Dann ist $Y_1' = Y_1' \cap Y = \bigcup_{i=1}^r (Y_1' \cap Y_i) = (Y_1' \cap Y_1) \cup \bigcup_{i=2}^r (Y_1' \cap Y_i)$. Da Y_1' irreduzibel und linke sowie rechte Seite abgeschlossen sind, muss also $Y_1' = (Y_1' \cap Y_1)$ oder $Y_1' = \bigcup_{i=2}^r (Y_1' \cap Y_i)$ gelten. Induktiv erhält man also $Y_1' = Y_1' \cap Y_i$ für ein i, also (nach einer geeigneten Umnummerierung der Y_j) $Y_1' \subseteq Y_1$. Umgekehrt erhält man: $Y_1 \subseteq Y_i'$ für ein i, also insgesamt $Y_1' \subseteq Y_i'$, und wegen der geforderten Minimalität der Darstellung somit $i = 1$. Also ist $Y_1' = Y_1$.
Wir wollen nun $\bigcup_{i=2}^r U_i = \bigcup_{i=2}^s U_i'$ zeigen. Dann sind wir fertig, da diese beiden Darstellungen einer abgeschlossenen Menge wieder im obigen Sinne minimal sind und wir induktiv die Gleichheit der beiden Darstellungen erhalten. Sei nun $Z := \overline{Y \setminus Y_1} = \overline{Y \setminus Y_1'}$. Wir wollen $Z = \bigcup_{i=2}^r Y_i$ (und damit analog auch $Z = \bigcup_{i=2}^s Y_i'$) zeigen. Zunächst ist natürlich $Y \setminus Y_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^r Y_i$. Da die rechte Seite abgeschlossen ist, ist damit aber auch schon $Z \subseteq \bigcup_{i=2}^r Y_i$. Wir müssen noch $Z \supseteq \bigcup_{i=2}^r Y_i$, d.h. $Z \supseteq Y_i$ für jedes i zeigen. Es ist $Y_i = (Y_i \cap Z) \cup (Y_i \cap Y_1)$, denn ist $x \in Y_i$ kein Element von Y_1, dann ist $x \in Y_i \setminus Y_1 \subseteq Z$, also $x \in Y_i \cap Z$. Es ist $Y_i \cap Y_1 \neq Y_i$, da sonst im Widerspruch zu den Voraussetzungen $Y_i \subseteq Y_1$ gelten würde. Da Y_i irreduzibel ist, folgt also $Y_i = Y_i \cap Z$, also $Y_i \subseteq Z$ und damit die Behauptung.

Korollar 2.5 *Jede algebraische Menge im $\mathbb{A}^n$ lässt sich eindeutig als endliche Vereinigung affiner Varietäten schreiben, von denen keine eine andere enthält.*

Beweis Die Aussage folgt direkt aus dem vorangegangenen Satz, da $\mathbb{A}^n$ ein noetherscher topologischer Raum ist.
Wir geben hier aber noch einen alternativen Beweis, der Satz 2.4 nicht verwendet und auf der Primärzerlegung beruht. Sei dazu $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge.
Wir zeigen zuerst die Existenz einer Zerlegung in affine Varietäten: Nach Korollar 2.3 ist $Y = Z(\mathfrak{a})$ mit einem Radikalideal $\mathfrak{a}$. Da A ein noetherscher Ring ist, hat $\mathfrak{a}$ eine Primärzerlegung, d.h. es gibt eine Zerlegung $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^r q_i$ in primäre Ideale $\mathfrak{q}_i$. Seien $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$ die dazugehörigen Primideale. Dann folgt $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$ und somit $Y = Z(\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i) = \bigcup_{i=1}^r Z(\mathfrak{p}_i)$. Nach Korollar 2.3 ist jedes der $Z(\mathfrak{p}_i)$ irreduzibel. Das zeigt die Existenz einer Zerlegung.

Nun zur Eindeutigkeit: Seien $Y = \bigcup_{i=1}^{r} Z(\mathfrak{p}_i) = \bigcup_{i=1}^{s} Z(\mathfrak{p}'_i)$ zwei minimale Zerlegungen von Y in affine Varietäten (alle auftretenden Ideale seien bereits als prim gewählt), d.h. keine der jeweils auftretenden affinen Varietäten enthält eine andere. Dann ist $Z(\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i) = Z(\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}'_i)$. Beide Schnitte von Primidealen sind Radikalideale, und wegen der Injektivität von Z auf Radikalidealen (siehe Korollar 2.3) folgt daher $\mathfrak{a} := \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}'_i$. Wegen den Voraussetzungen an die affinen Varietäten enthält dann insbesondere kein $\mathfrak{p}_i$ ein $\mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$ (für die andere Zerlegung entsprechend). Wir haben also zwei minimale Primärzerlegungen von $\mathfrak{a}$, wobei die dazugehörigen Primideale genau die $\mathfrak{p}_i$ bzw. $\mathfrak{p}'_i$ selbst sind. Da diese nicht von der gewählten minimalen Primärzerlegung abhängen, folgt die Gleichheit der beiden Zerlegungen von $\mathfrak{a}$ und rückwirkend auch die Gleichheit der Zerlegung von Y.

Wir greifen kurz auf Begriffe des kommenden Vortrags zurück, die wir im Weiteren benötigen werden:

Definition Ist X ein topologischer Raum, so definieren wir die Dimension von X, geschrieben $\dim(X)$, als das Supremum aller ganzen Zahlen n, für die es eine Kette $Z_0 \subset Z_1 \subset ... \subset Z_n$ von paarweise verschiedenen irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen von X gibt. Die Dimension einer (quasi-)affinen Varietät ist ihre Dimension als topologischer Raum.

Bemerkung Für eine algebraische Menge Y ist $dim(Y) = dim(A(Y))$

3 Morphismen zwischen affinen Varietäten

Im Folgenden werden wir Abbildungen zwischen (quasi)-affinen Varietäten studieren. Dazu definieren wir zunächst reguläre Funktionen auf Varietäten und darauf aufbauend Morphismen zwischen (quasi)-affinen Varietäten.
Sei Y eine quasi-affine Varietät im $\mathbb{A}^n$

Definition Eine Abbildung $f : Y \to k$ ist regulär im Punkt $P \in Y$, wenn f lokal in P der Quotient von Polynomen ist. Genauer: Es gibt eine Umgebung $U \subseteq Y$ von P und Polynome $g, h \in K[x_1, ..., x_n]$, sodass h auf U nirgends verschwindet und $f = \frac{g}{h}$ auf U. Hierbei interpretiert man g und h als Funktionen auf $\mathbb{A}^n$, also auch auf Y.
f heißt regulär auf Y, wenn f in jedem Punkt von Y regulär ist.

Um zu zeigen, dass jede reguläre Abildung auf natürliche Weise stetig ist, zeigen wir zuerst ein topologisches Lemma:

Lemma 3.1 *Sei Z eine Teilmenge eines topologischen Raums Y. Dann ist Z genau dann abgeschlossen, wenn Y so mit offenen Mengen U überdeckt werden kann, dass $Z \cap U$ abgeschlossen in U ist für jede der Mengen U.*

Beweis Die Hinrichtung ist klar: Man nehme als offene Überdeckung von Y einfach die Menge $\{Y\}$.
Zur Rückrichtung: Wir müssen zeigen, dass Z jeden Randpunkt enthält, das heißt jeden Punkt $P \in Y$, sodass jede Umgebung von P sowohl Z als auch Z^c nichtleer schneidet. Sei also P so ein Punkt und U eine Menge aus der Überdeckung von Y mit $P \in U$. Für jede Umgebung V von P ist dann auch $V \cap U$ eine Umgebung von P und schneidet folglich Z und Z^c nichtleer. Dann schneidet $V \cap U$ auch $Z \cap U$ und $U \setminus Z \cap U$ nichtleer. Da alle in U offenen Umgebungen von P von der Gestalt $V \cap U$ sind, ist folglich P ein Randpunkt von $Z \cap U$ in U. $Z \cap U$ ist aber abgeschlossen in U, weswegen $P \in Z \cap U \subseteq Z$. Also enthält Z jeden Randpunkt.

Lemma 3.2 *Wir identifizieren k mit $\mathbb{A}^1_k$ zusammen mit der Zariski-Topologie. Dann ist jede reguläre Funktion $f : Y \to k$ stetig.*

Beweis Wir müssen zeigen, dass das Urbild jeder abgeschlossenen Menge unter f abgeschlossen ist. Wegen $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n a_i) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(a_i)$ und da die abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{A}^1$ endlich sind (abgesehen von $\mathbb{A}^1$ selbst, ein trivialer Fall), genügt es nachzuweisen, dass $f^{-1}(a)$ abgeschlossen ist für jeden Punkt $a \in \mathbb{A}^1$. Zum Nachweis benutzen wir Lemma 3.1.
Da f regulär ist, wird Y überdeckt von offenen Mengen U, sodass f auf jeder solchen Menge Quotient von Polynomen ist. Sei U eine Menge aus der Überdeckung und Polynome g, h gegeben, sodass h auf U nirgends verschwindet und mit $f = \frac{g}{h}$ auf U. Dann ist $f^{-1}(a) \cap U = \{P \in U | g(P)/h(P) = a\}$. Nun gilt $g(P)/h(P) = a$ genau dann, wenn $(g - ah)(P) = 0$. Also ist $f^{-1}(a) \cap U = Z(g - ah) \cap U$, was abgeschlossen in U ist. Nach Lemma 3.1 ist damit $f^{-1}(a)$ abgeschlossen in Y.

Korollar 3.3 *Seien f und g reguläre Funktionen auf einer Varietät X und es gelte $f = g$ auf einer nichtleeren offenen Teilmenge $U \subseteq X$. Dann ist $f = g$ auf ganz X, denn:*
Die Menge $(f-g)^{-1}(0)$ ist abgeschlossen und enthält U. Nun liegt U aber als offene Teilmenge eines irreduziblen Raums dicht in X, also auch $(f - g)^{-1}(0)$. Man folgert

$$(f - g)^{-1}(0) = \overline{(f - g)^{-1}(0)} = X$$

d.h. f und g stimmen auf ganz X überein.

Definition Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine Varietät über k ist eine affine oder quasi-affine Varietät. Sind X und Y zwei Varietäten, so ist ein Morphismus $\phi : X \to Y$ eine stetige Abbildung, sodass für jede offene Menge $V \subseteq Y$ und jede reguläre Abbildung $f : V \to k$ auch die induzierte Abbildung $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \to k$ regulär ist.
Man beachte, dass die Definition Sinn ergibt, da die Menge $\phi^{-1}(V)$ wegen der Stetigkeit von ϕ offen ist.
Man rechnet leicht nach, dass die Hintereinanderausführung zweier Morphismen wieder ein Morphismus ist.
Ein Isomorphismus $\phi : X \to Y$ ist ein Morphismus, sodass es einen Morphismus $\psi : Y \to X$ gibt mit $\psi \circ \phi = id_X$ und $\phi \circ \psi = id_Y$. Ein Isomorphismus ist also insbesondere ein Homöomorphismus. Man beachte aber, dass nicht jeder Morphismus, der auch Homöomorphismus ist, auch ein Isomorphismus ist:

Beispiel

1. Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{A}^1 \to Z(X^3 - Y^2)$, die gegeben ist durch $\phi(t) = (t^2, t^3)$. Dann ist ϕ ein Morphismus und ein Homöomorphismus, jedoch kein Isomorphismus

2. Sei nun k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$, $\phi(t) = t^p$, ein Morphismus und ein Homöomorphismus, aber wieder kein Isomorphismus.

Beweis

1. Offenbar ist ϕ wohldefiniert, injektiv und surjektiv. ϕ ist auch ein Morphismus, denn ϕ ist durch Polynome gegeben (siehe Übungsblatt 12 aus der Vorlesung). Um zu zeigen, dass ϕ Homöomorphismus ist, muss also noch gezeigt werden, dass ϕ abgeschlossen ist. Aber abgeschlossene Mengen in $\mathbb{A}^1$ sind entweder alles oder endlich viele Punkte. Endlich viele Punkte sind jedoch auch in $Z(X^3 - Y^2)$ abgeschlossen.
Es bleibt zu zeigen, dass ϕ^{-1} kein Morphismus ist. Da ϕ^{-1} stetig ist, ist also nachzuweisen, dass nicht jede reguläre Abbildung übertragen wird. Sei dazu $f : \mathbb{A}^1 \to k$ die Identität, d.h. $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{A}^1$. Dann ist f regulär. Aber die Abbildung $f \circ \phi^{-1} = \phi^{-1}$ ist nicht regulär, denn:

Wäre ϕ^{-1} regulär, so wäre es gegeben durch ein Polynom $g \in k[X,Y]$ in zwei Variablen (siehe das nachfolgende Theorem 3.5, (1.)). Dann wäre aber $g(u,v) = \phi^{-1}(u,v) = \sqrt{u}$ für eine geeignete Quadratwurzel von u, und das für alle $(u,v) \in Z(X^3 - Y^2)$. Folglich ist stets $g^2(u,v) = u$ und daher $g^2 - X \in I(Z(X^3 - Y^2)) = (X^3 - Y^2)$, wobei man für Letzteres ausnutzt, dass $(X^3 - Y^2)$ prim ist. Folglich gibt es ein Polynom $p \in k[X,Y]$ mit $g^2 = p \cdot (X^3 - Y^2) + X$. Wegen $g^2(0,0) = \sqrt{0} = 0$ besitzt g jedoch keinen konstanten Term, also besitzt g^2 keinen Term vom Grad 1, im Widerspruch zur gezeigten Darstellung von g. Also ist ϕ^{-1} doch nicht regulär und demnach auch kein Morphismus.

2. ϕ ist der Frobeniusautomorphismus von k und daher insbesondere bijektiv (siehe Algebra I). Da ϕ durch ein Polynom gegeben ist, ist ϕ ein Morphismus. Mit der gleichen Begründung wie in (1.) bildet ϕ abgeschlossene Mengen wieder auf solche ab, also ist ϕ sogar ein Homöomorphismus.
   Dennoch ist ϕ kein Isomorphismus, d.h. ϕ^{-1} ist kein Morphismus. Wie im ersten Beispiel müssen wir dazu nur zeigen, dass ϕ^{-1} selbst nicht regulär ist. Angenommen, ϕ^{-1} wäre regulär, also gegeben durch ein Polynom $g \in k[X]$. Dann folgte $g(u) = \sqrt[p]{u}$, d.h. $g^p(u) = u$ für alle $u \in k$. Da k unendlich ist, folgt damit jedoch $g^p = X$, was aus Gradgründen nicht stimmen kann. Also ist ϕ^{-1} tatsächlich kein Morphismus.

Nun definieren wir einige Ringe, die mit jeder Varietät assoziiert sind, und die unter Isomorphismen invariant bleiben.

Definition Sei Y eine Varietät. Dann bezeichne $\mathcal{O}(U)$ den Ring aller regulären Funktionen auf Y.
Ist P ein Punkt, dann definieren wir den lokalen Ring von P auf Y, $\mathcal{O}_{P,Y}$ oder $\mathcal{O}_P$, als die Menge aller Äquivalenzklassen von Funktionen, die nahe P regulär sind. Genauer: Ein Element von $\mathcal{O}_P$ ist ein Tupel $\langle U, f \rangle$, wobei $U \subseteq Y$ eine offene Umgebung von P und f eine auf U reguläre Funktion ist. Dabei identifizieren wir zwei Paare $\langle U, f \rangle$ und $\langle V, g \rangle$, wenn $f = g$ auf $U \cap V$.
Letzteres ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Wir betrachten zum Beispiel die Transitivität: Seien $\langle U, f \rangle$, $\langle V, g \rangle$ und $\langle W, h \rangle$ Tupel, sodass $f = g$ auf $U \cap V$ und $g = h$ auf $V \cap W$. Dann ist $f = h$ auf $U \cap V \cap W$, und nach Korollar 3.3 sogar auf $U \cap W$.

Bemerkung $\mathcal{O}_P$ ist tatsächlich ein lokaler Ring: Sei $\mathfrak{m}$ die Menge aller Paare $\langle U, f \rangle$, sodass $f(P) = 0$. Ist $f(P) \neq 0$, dann ist wegen der Stetigkeit von f die Menge $f^{-1}(k \setminus \{0\})$ offen und eine Umgebung von P. Dort kann f also invertiert werden und ist offensichtlich wieder regulär. Also sind alle Elemente aus $\mathcal{O}_P \setminus \mathfrak{m}$ Einheiten und folglich $\mathcal{O}_P$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Man bemerke, dass man unter der Abbildung $\mathcal{O}_P \to k$, $\langle U, f \rangle \mapsto f(P)$ den Isomorphismus $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m} \cong k$ hat.

Definition Ist Y eine Varietät, so definieren wir den Funktionenkörper $K(Y)$ wie folgt: Ein Element von $K(Y)$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren $\langle U, f \rangle$, wobei $U \subseteq Y$ eine beliebige, nichtleere offene Menge und f eine auf U reguläre Funktion ist. Zwei solche Tupel $\langle U, f \rangle$, $\langle V, g \rangle$ werden wie in der Definition von $\mathcal{O}_P$ identifiziert, wenn $f = g$ auf $U \cap V$.
Der Unterschied zur Definition von $\mathcal{O}_P$ besteht also darin, dass nicht mehr gefordert wird, dass die offenen Mengen U einen ausgewählten Punkt P enthalten.
Die Elemente von $K(Y)$ heißen *rationale Funktionen* auf Y.

Bemerkung Man beachte, dass $K(Y)$ tatsächlich ein Körper ist. Da Y irreduzibel ist, haben zwei nichtleere offene Mengen einen nichtleeren Schnitt, auf dem man Addition und Multiplikation zweier Funktionen definieren kann. Somit wird $K(Y)$ zu einem Ring (Auf die gleiche Weise wird übrigens auch $\mathcal{O}_P$ zu einem Ring). Zur Bildung von Inversen: Ist $\langle U, f \rangle \in K(Y)$ und $f \neq 0$, dann kann man f auf der offenen, nichtleeren Menge $V := U \setminus (U \cap f^{-1}(0))$

invertieren. Das Tupel $\langle V, 1/f\rangle$ ist dann invers zu $\langle U, f\rangle$, da deren Produkt auf V konstant 1 ist. Man hat für jedes $P \in Y$ natürliche Abbildungen $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}_P \to K(Y)$, wobei die erste Abbildung eine auf Y reguläre Abbildung f natürlich auf das Tupel $\langle Y, f\rangle$ abbildet. Beide Abbildungen sind trivialerweise injektiv. Für gewöhnlich betrachten wir daher $\mathcal{O}(Y)$ und $\mathcal{O}_P$ als Unterringe von $K(Y)$.
Sind die Varietäten X und Y isomorph, d.h. gibt es einen Isomorphismus $f : X \to Y$ dann folgt auf natürliche Weise auch $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$, $\mathcal{O}_{P,X} \cong \mathcal{O}_{f(P),Y}$ und $K(X) \cong K(Y)$. Dazu überträgt man die jeweiligen regulären Abbildungen einfach mit Hilfe der Abbildung f. Für den ersten Isomorphismus definiert man zum Beispiel eine Abbildung $\overline{f} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ durch $\overline{f}(\phi) = \phi \circ f$. Dies ist dann ein Ringisomorphismus. Die anderen beiden Isomorphismen definiert man entsprechend, wobei man die zu den regulären Abbildungen gehörigen offenen Mengen ebenfalls mit Hilfe von f überträgt. Die Ringe $\mathcal{O}(X)$, $\mathcal{O}_{P,X}$ und $K(X)$ sind also Invarianten der Varietät X bis auf Isomorphie, d.h.: ist für zwei Varietäten X und Y einer dieser Ringe nicht isomorph, dann sind die Varietäten bereits nicht isomorph. Im nächsten Satz zeigt die Isomorphie $\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$ daher insbesondere, dass $A(Y)$ eine Invariante bis auf Isomorphie darstellt.

Lemma 3.4 *Sei B ein Integritätsring. Mit Hilfe der universellen Eigenschaft von Lokalisierungen können wir jede Lokalisierung $B_\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von B ist, als Teilring des Quotientenkörpers $Q(B)$ von B auffassen. Dann folgt $B = \bigcap_\mathfrak{m} B_\mathfrak{m}$, wobei der Schnitt über alle maximalen Ideale von B gebildet wird.*

Beweis Die Inklusion $B \subseteq \bigcap_\mathfrak{m} B_\mathfrak{m}$ ist klar, denn B ist ein Integritätsring und die auftretenden multiplikativen Mengen enthalten nicht die 0. Die andere Inklusion zeigen wir indirekt: Sei $\frac{x}{y} \in Q(B)\backslash B$ und sei $\mathfrak{a} := \{s \in B | b \cdot \frac{x}{y} \in B\}$ das Ideal der möglichen Nenner von Darstellungen von $\frac{x}{y}$ sowie der Null. Wegen $\frac{x}{y} \notin B$ ist $1 \notin \mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Dann folgt aber nach Definition von $\mathfrak{a}$ für jedes $s \in B \setminus \mathfrak{m}$ und für jedes $b \in B$: $s \cdot \frac{x}{y} \neq b$, also $\frac{x}{y} \neq \frac{b}{s}$. Also ist $\frac{x}{y} \notin B_\mathfrak{m}$. Das zeigt die Implikation $(\frac{x}{y} \notin B) \Rightarrow (\frac{x}{y} \notin \bigcap_\mathfrak{m} B_\mathfrak{m})$ und somit die Behauptung.

Theorem 3.5 *Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät mit affinem Koordinatenring $A(Y)$. Dann folgt:*

1. $\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$
2. *Für jedes $P \in Y$ sei $\mathfrak{m}_P \subseteq A(Y)$ das Ideal derjenigen Funktionen, die auf P verschwinden. Dann ist $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ eine Bijektion zwischen den Punkten von Y und den maximalen Idealen in $A(Y)$*
3. *Für jedes P hat man $\mathcal{O}_P \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ und $dim(\mathcal{O}_P) = dim(Y)$*
4. *$K(Y)$ ist isomorph zum Quotientenkörper von $A(Y)$, und somit ist $K(Y)$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung von k vom Transzendenzgrad $dim(Y)$.*

Beweis Zuerst definieren wir wie folgt eine Abbildung $\alpha : A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$. Jedes Polynom $f \in A = k[x_1, ..., x_n]$ induziert natürlich eine reguläre Abbildung auf $\mathbb{A}^n$ (denn f kann ja überall als $\frac{f}{1}$ geschrieben werden), und somit auch auf Y. Dies definiert also eine Abbildung $A \to \mathcal{O}(Y)$. Der Kern ist per Definition gerade $I(Y)$, weswegen wir einen injektiven Homomorphismus $\alpha : A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$ erhalten, den wir von nun an als Inklusion verstehen.
Nach Korollar 2.3 gibt es eine Bijektion zwischen den Punkten von Y (d.h. den minimalen algebraischen Teilmengen von Y) und den maximalen Idealen in A, die $I(Y)$ enthalten - nach Quotientenbildung also zu den maximalen Idealen in $A(Y)$. Das liefert eine Bijektion $P \mapsto \mathfrak{m}_P := I(P)/I(Y)$. Aber $\mathfrak{m}_P$ besteht nach der Inklusion α per Definition aus genau denjenigen Funktionen in $A(Y)$, welche auf P verschwinden. Das zeigt (2.).

Für jedes P gibt es eine natürliche Abbildung $\alpha_P : A(Y)_{\mathfrak{m}_P} \to \mathcal{O}_P$, die wie folgt definiert ist: Ein Element aus $A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ ist ein Bruch $\overline{f}/\overline{g}$, wobei f und g Polynome sind und $\overline{g}$ in P nicht verschwindet. Sei $V := (\overline{g}^{-1}(0))^c$. V ist nach Lemma 3.2 offen und nach Konstruktion ist $P \in V$. Man definiert dann einfach $\alpha_P(\overline{f}/\overline{g}) = \langle V, f/g \rangle$. Zur Injektivität: Ist $\langle V, f/g \rangle = \langle U, 0 \rangle$, d.h. stimmen f/g und 0 auf der offenen Menge $V \cap U$ überein, so ist $f = 0$ auf $V \cap U$ und somit nach Korollar 3.3 $f = 0$ auf ganz Y. Das bedeutet aber $f \in I(Y)$ und somit $\overline{f} = 0$, d.h. $\overline{f}/\overline{g} = 0$, was die Injektivität zeigt. Zur Surjektivität: Ist $\langle U, f \rangle \in \mathcal{O}_P$ so gibt es eine kleine Umgebung um P, sodass $f = \frac{g}{h}$ mit Polynomen g und h und $h(P) \neq 0$. Dann ist einfach $\overline{g}/\overline{h}$ ein Urbild. Also ist $\mathcal{O}_P \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$. Damit folgt

$$dim(\mathcal{O}_P) = height(\mathfrak{m}_P) = dim(A(Y)) - dim(A(Y)/\mathfrak{m}_P) = dim(Y) - dim(k) = dim(Y)$$

Das zeigt (3.).
Nun wieder zu (1.): Es ist $\mathcal{O}(Y) \subseteq \bigcap_{P \in Y} \mathcal{O}_P$, wenn man alle auftretenden Ringe als Unterring von $K(Y)$ auffasst. Nun ist nach (3.) aber $\mathcal{O}_P = A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$, und da nach (2.) alle maximalen Ideale von der Form $\mathfrak{m}_P$ sind, hat man also

$$A(Y) \subseteq \mathcal{O}(Y) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}} A(Y)_{\mathfrak{m}}$$

wobei $\mathfrak{m}$ über alle maximalen Ideale von $A(Y)$ läuft. Die fehlende Inklusion $\bigcap_{\mathfrak{m}} A(Y)_{\mathfrak{m}} \subseteq A(Y)$ folgt dann aus Lemma 3.4.
Nun zu (4.): Der Quotientenkörper von $A(Y)$ ist der gleiche wie der von $A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ für jedes $P \in Y$ und letzteres ist das Gleiche wie der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_P$ nach (3.). Diese Quotientenkörper liegen alle in $K(Y)$, denn $K(Y)$ ist ein Körper und jedes $\mathcal{O}_P$ ist in $K(Y)$ eingebettet. Da andersherum aber auch jedes Element aus $K(Y)$ in einem $\mathcal{O}_P$ enthalten ist, also auch in dessen Quotientenkörper, ist der Quotientenkörper von $A(Y)$ tatsächlich gleich $K(Y)$. Nun ist $A(Y)$ eine endlich erzeugte k-Algebra, also ist $K(Y)$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung von k, erzeugt als Körper von den gleichen Elementen, die schon $A(Y)$ als k-Algebra erzeugt haben. Nun ist der Transzendenzgrad von $K(Y)$ über k nach Vortrag 9 gleich $dim(A(Y)) = dim(Y)$. Damit ist alles gezeigt.

Literatur

[1] M. Atiyah und I.G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1996.
[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer, 1977